Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

Pohybuje-li se hmotný bod po přímce tak, že velikost jeho rychlosti není v čase konstantní, jedná se o pohyb nerovnoměrný. Nejjednoduššími nerovnoměrnými pohyby jsou:

1. rovnoměrně zrychlený pohyb – zrychlení $\vec{a}$ má stejný směr jako vektor rychlosti $\vec{v}$ a velikost rychlosti se s časem zvětšuje
2. rovnoměrně zpomalený pohyb – zrychlení $\vec{a}$ má opačný směr než vektor rychlosti $\vec{v}$ a velikost rychlosti se s časem zmenšuje

Oba tyto pohyby je možné vyšetřovat společně (přičemž budeme mluvit o pohybu rovnoměrně zrychleném), uvědomíme-li si, že:

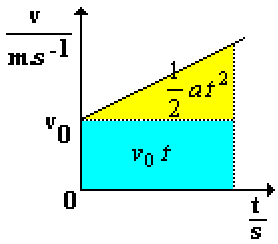
1. $a > 0$ pro pohyb rovnoměrně zrychlený
2. $a < 0$ pro pohyb rovnoměrně zpomalený

Z hlediska českého jazyka je trošku problematické, že se zrychlené pohyby dělí na zrychlené a zpomalené, ale to snad nebude činit výraznější problémy.

Velikost okamžité rychlosti hmotného bodu, který se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem s počáteční rychlostí v_0 a se zrychlením *a*, se mění s časem podle vztahu $v = v_0 + at$.

Tento vztah lze odvodit přímo z definice velikosti zrychlení. Tu lze psát ve tvaru: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t}$.

Ze vztahu $a = \frac{v - v_0}{t}$ lze už snadno vyjádřit $v = v_0 + at$.



Obr. 25

Dříve než se podíváme, jak se mění s časem dráha rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu, uvědomíme si důležitou věc. Rychlost tohoto pohybu roste lineárně s časem (viz graf na obr. 25). V tom případě se průměrná rychlost rovná aritmetickému průměru okamžitých rychlostí na začátku a na konci uvažované dráhy. Na začátku pohybu (v čase $t = 0\,s$) se hmotný bod pohybuje rychlostí o velikosti v_0, v čase *t* pak má jeho rychlost velikost $v = v_0 + at$, kde *a* je velikost zrychlení. Průměrná rychlost tedy je: $v_p = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{v_0 + v_0 + at}{2} = v_0 + \frac{at}{2}$.

Touto průměrnou rychlostí urazí hmotný bod za čas *t* dráhu *s*, tedy $s = v_p t = \left(v_0 + \frac{at}{2}\right)t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Vztah $s = vt$ je pro zrychlený pohyb nepoužitelný!!! Lze ho použít pouze v případě, že místo *v* dosadíme velikost PRŮMĚRNÉ RYCHLOSTI, tedy $s = v_p t$. Vztah $s = vt$ je platný pouze v případě, že velikost rychlosti, která v něm vystupuje, je konstantní. U pohybu zrychleného se okamžitá rychlost mění, ale průměrná je konstantní.

Je-li počáteční dráha hmotného bodu s_0, je dráha v čase *t* rovna $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Grafem závislosti uražené dráhy na čase u pohybu rovnoměrně zrychleného je část paraboly. Vrchol této paraboly lze určit doplněním kvadratického trojčlenu na druhou mocninu (na čtverec) kvadratického dvojčlenu.

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(t^2 + 2\frac{v_0}{a}t\right) + s_0 = \frac{1}{2}a\left(t^2 + 2\frac{v_0}{a}t + \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{v_0}{a}\right)^2\right) + s_0 =$$

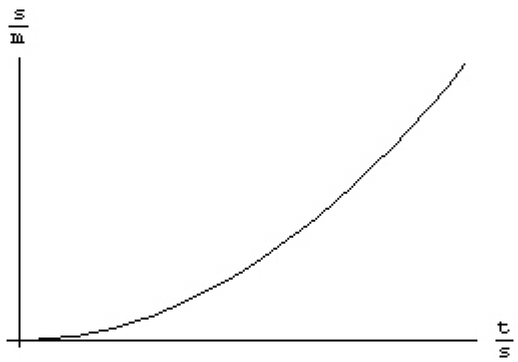
$$= \frac{1}{2}a\left(t^2 + 2\frac{v_0}{a}t + \left(\frac{v_0}{a}\right)^2\right) + s_0 - \frac{1}{2}a\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a\left(t + \frac{v_0}{a}\right)^2 + s_0 - \frac{v_0^2}{2a}.$$

Vrchol paraboly má tedy souřadnice $\left[-\frac{v_0}{a}; s_0 - \frac{v_0^2}{2a}\right]$.

Sestrojíme-li graf závislosti velikosti okamžité rychlosti na čase, lze získat číselnou hodnotu uražené dráhy přímo z tohoto grafu jako obsah plochy pod křivkou (na obr. 25 je to součet obsahů obou vyšrafovaných ploch).

Na obr. 26 je pak znázorněn graf závislosti uražené dráhy na čase u pohybu rovnoměrně zrychleného (obr. 25 a obr. 26 odpovídají pohybu se zrychlením $a > 0$).

Grafy odpovídající rovnoměrně zpomalenému pohybu (tj. rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením $a < 0$) vysvětlíme na příkladu.



Obr. 26

Uvažujme pohyb hmotného bodu, který se rozjíždí z klidu se stálým zrychlením o velikosti $2\,\mathrm{m.s^{-2}}$ po dobu $50\,\mathrm{s}$. Poté se pohybuje dalších $50\,\mathrm{s}$ stálou rychlostí a nakonec za dobu $20\,\mathrm{s}$ zabrzdí. Pohyb se tedy skládá ze tří částí: rovnoměrně zrychleného pohybu, z pohybu rovnoměrného a z pohybu rovnoměrně zpomaleného.

Před zakreslením grafu závislosti dráhy na čase je dobré si uvědomit, že v první fázi pohybu půjde o parabolu, která bude procházet bodem $[0; 0]$ (v nulovém čase nemá hmotný bod uraženou žádnou dráhu - rozjíždí se z klidu). Parabola bude končit v čase $50\,\mathrm{s}$, kterému odpovídá dráha $s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}.2.50^2\,\mathrm{m} = 2500\,\mathrm{m}$. (Při pečlivějším rýsování by bylo dobré určit ještě několik bodů mezi dvěma krajními.) V tuto dobu bude mít hmotný bod rychlost o velikosti $v = at_1 = 2.50\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Touto rychlostí se bude pohybovat dalších $50\,\mathrm{s}$, tj. urazí dráhu $s_2 = vt_2 = 100.50\,\mathrm{m} = 5000\,\mathrm{m}$. Grafem závislosti uražené dráhy na čase této části pohybu bude úsečka, jejímiž krajními body jsou body $[50; 2500]$ a $[100; 7500]$. Poslední fází pohybu je brzdění, které trvá $20\,\mathrm{s}$. Zrychlení při zastavování tedy určíme ze vztahu $a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-100}{20}\,\mathrm{m.s^{-2}} = -5\,\mathrm{m.s^{-2}}$ (hmotný bod má zastavit - tj. „nová“ rychlost bude mít velikost $0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$). Během zastavování urazí hmotný bod dráhu $s_3 = vt_3 + \frac{1}{2}a_2t_3^2 = 100.20 + \frac{1}{2}.(-5).20^2\,\mathrm{m} = 1000\,\mathrm{m}$ a grafem závislosti dráhy na čase této fáze pohybu bude opět parabola. Ale musí být otočená tak, aby dráha narůstala pomaleji než v případě pohybu rovnoměrného. Parabola bude končit v bodě $[120; 8000]$.

Při kreslení výsledného grafu je nutno mít na paměti, že v místě „spojů“ jednotlivých částí grafů nesmí být žádné „špičky“. Graf musí být „hladký“. To fyzikálně znamená, že při přechodu z rovnoměrně zrychleného pohybu na pohyb rovnoměrný nedojde ke změně rychlosti. Pro názornost je v grafu na obr. 27 zobrazena čárkovaně přímka, která je prodloužením části grafu odpovídající rovnoměrnému přímočarému pohybu. Je tedy vidět, že u rovnoměrného pohybu je velikost rychlosti hmotného bodu nižší, než kdyby hmotný bod stále zrychloval - dráha tedy narůstá pomaleji (kolečko v tachometru automobilu udávající uraženou dráhu se otáčí pomaleji). Při zastavování platí totéž: dráha stále narůstá, ale výrazně pomaleji než v případě pohybu rovnoměrného.

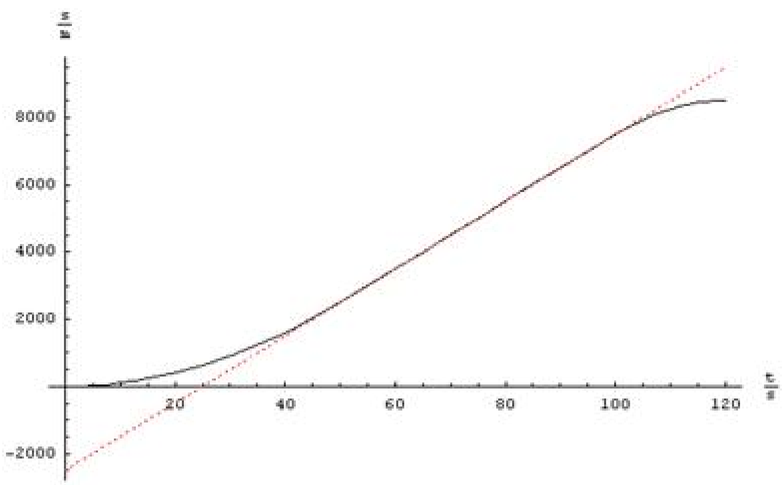
V bodech, v nichž se spojují jednotlivé části právě popsaného grafu, musí být spojitá první derivace zobrazené funkce. Tj. jednostranné derivace obou spojovaných částí grafu musí být v bodě spojení stejné.

První derivace zobrazené funkce (dráha v závislosti na čase) je rychlost. To odpovídá předchozímu „nematematickému“ popisu.

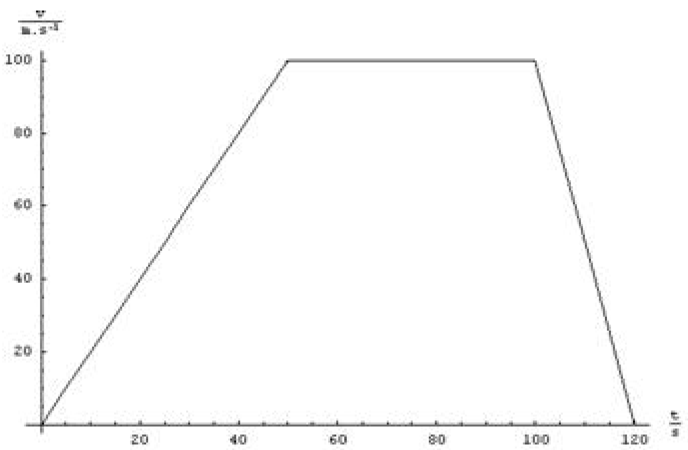
Graf závislosti velikosti rychlosti na čase vytvoříme rychleji, protože vše potřebné již víme. Graf se bude skládat ze tří úseček. Pohybu rovnoměrně zrychlenému bude odpovídat úsečka, jejímiž koncovými budou body $[0; 0]$ a $[50; 100]$. Pohyb rovnoměrný je charakterizován konstantní rychlostí, tj. na úseku mezi 50. a 100. sekundou pohybu bude velikost rychlosti konstantní. Pohyb rovnoměrně zpomalený je charakterizován zmenšující se velikostí rychlosti. Celý graf je zobrazen na obr. 28.

Kontrola, že jsou oba grafy správně a korespondují spolu: plocha ohraničená grafem závislosti velikosti rychlosti na čase (v našem případě lichoběžník) musí mít číselně stejnou plochu jako je celková uražená dráha. Plocha lichoběžníku: $\frac{1}{2}(120+50)\ \mathrm{s}.100\ \ \mathrm{m.s}^{-1} = 8500\ \mathrm{m}$. Tatáž celková dráha vyšla i při sestrojování grafu závislosti uražené dráhy na čase.

Poznámka: V uvedeném příkladu byly zvoleny velké hodnoty velikosti zrychlení pro lepší názornost grafů. Ve skutečném životě se s tak velkými hodnotami zrychlení resp. rychlosti běžně nesetkáme.



Obr. 27



Obr. 28

V souvislosti s pohybem rovnoměrně zpomaleným se často v praxi používá termín **brzdná dráha**. To je dráha, na které těleso zastaví. Její hodnota je $s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$.
