

d'Alembertův princip

Autorem tohoto principu je Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783), který tento princip publikoval v roce 1742.

SYSTEM N HMOTNÝCH BODŮ SE VYVÍJÍ TAKOVÝM ZPŮSOBEM, ŽE PLATÍ:

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = 0, \quad (9)$$

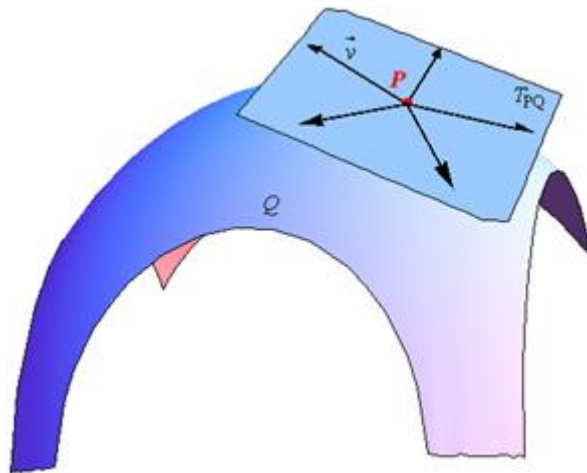
KDE δx^i JSOU SLOŽKY TZV. VIRTUÁLNÍHO POSUNUTÍ.

Rovnicí (9) tak vlastně d'Alembert přeformuloval Newtonovu [mechaniku](#) pomocí nového přístupu. Základní představa byla taková, že virtuální posunutí jsou nekonečně malá posunutí, která jsou v souladu s [vazbami](#) $\varphi_k(x^i, t) = 0$. Složka δx^i virtuálního posunutí tak vlastně odpovídá změně polohy hmotného bodu, tj. odpovídá změně souřadnice x^i .

Pokud tedy rovnice (9) platí pro všechna δx^i , odpovídají složky [sil](#) F_i složkám [zrychlení](#) \ddot{x}_i a [pohyb](#) hmotného bodu lze uskutečnit. Na základě \ddot{x}_i můžeme určit polohu hmotného bodu v čase a můžeme tak konstruovat jeho [trajektorii](#) implicitním způsobem.

Rovnice (9) je tedy splněna tehdy, pokud složky sil F_i a složky zrychlení \ddot{x}_i jsou vzájemně dobře nastaveny.

Virtuální posunutí se složkami δx^i je pojem, který zavedl d'Alembert a jeho kolegové. Z hlediska současné interpretace lze na virtuální posunutí nahlížet jako na tečný vektor \vec{v} , který je sestrojen v daném bodě P plochy k této ploše, po níž se hmotný bod pohybuje. Jedná se o tzv. [konfigurační prostor](#) Q , který je popsán rovnicí $\varphi = 0$. Všechny uvažované tečné vektory pak leží v tečné rovině T_{PQ} sestrojené v bodě P (viz obr. 12). Proto platí $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3, \dots, v^{3N}) = (\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N})$.



Obr. 12

Každý bod konfiguračního prostoru Q má svůj tečný prostor - tečnou rovinu T_{PQ} .

Konfigurační prostor tedy je plochou vazby popsané rovnicí $\varphi = 0$. V něm leží ty body, v nichž se může pohybuující se hmotný bod nacházet.

V rovnici (9) tedy testujeme [výchylku](#) hmotného bodu z bodu, v němž se právě nachází, do všech tečných směrů popsanych tečnými vektory \vec{v} ležícími v T_{PQ} .

D'ALEMBERTŮV PRINCIP JE EKVIVALENTNÍ LAGRANGEOVÝM ROVNICÍM I. DRUHU (VIZ ROVNICE (7) A (8)) A TEDY JE EKVIVALENTNÍ I NEWTONOVÝM ROVNICÍM S (HOLONOMNÍMI) VAZBAMI.

Toto tvrzení lze dokázat.

Nejdříve dokážeme implikaci, že z Lagrangeových rovnic I. druhu (tj. ze vztahů (7) a (8)) vyplývá d'Alembertův princip (vztah (9)).

Rovnici $m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$ upravíme na tvar $m_i \ddot{x}_i - F_i = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$ a vynásobíme složkou

virtuálního posunutí δx^i a sečteme: $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \delta x^i$. Nyní zaměníme pořadí sčítání

na pravé straně rovnice $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \delta x^i$. Pokud uvědomíme, že $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$ je složka

gradientu φ a δx^i je složka tečného vektoru, můžeme psát $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \text{grad} \varphi_k \cdot \vec{v}$. Gradient

plochy φ má ovšem směr normály k této ploše (viz vztah (4)) a je tedy kolmý k tečně (resp. k tečné rovině) v daném bodě. Je tedy kolmý i k tečnému vektoru \vec{v} a jejich skalární součin je nulový. Proto

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = 0.$$

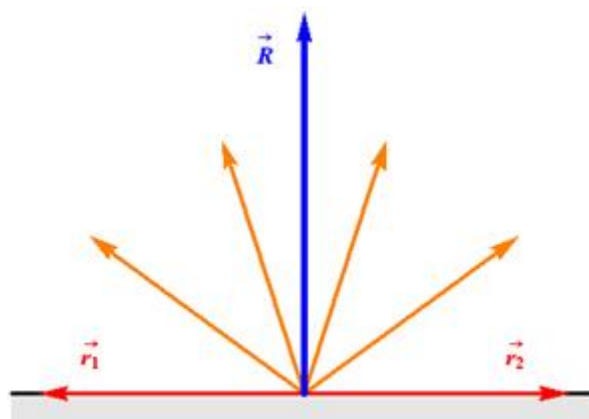
Důkaz obrácené implikace, tj. že ze vztahu (9) vyplývají vztahy (7) a (8) provedeme úvahou. Uvážíme dva případy:

1. neexistuje vazba - to znamená, že složky virtuálního posunutí $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ jsou navzájem nezávislé a tedy $m_i \ddot{x}_i - F_i = 0$ pro všechna i od 1 do $3N$;
2. existují vazby - to znamená, že složky virtuálního posunutí $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ obecně nejsou navzájem nezávislé. Metodou Lagrangeových multiplikátorů lze dokázat, že musí existovat systém $3N + \nu$ rovnic, které splňují podmínky (7) a (8).

Fakt, že složky $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ nejsou obecně nezávislé si lze představit následující úvahou: když jdeme ze schodů, jdeme dopředu, ale zároveň jdeme dolů. Tj. díky existenci vazby (schody) nemůže naše rychlost mířit libovolným směrem. Složky $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ jsou složkami tečných vektorů. A vektor rychlosti je k dané ploše vždy tečný.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů se používá v matematické analýze při hledání vázaných extrémů funkcí více proměnných.

Rovnice (9) platí jen pro vratná virtuální posunutí δx^i , tj. taková posunutí, že k posunutí δx^i existuje také posunutí $-\delta x^i$. V případě oboustranných vazeb jsou všechna posunutí vratná. V případě jednostranných vazeb by vratná posunutí byla jen dvě - viz obr. 13, na kterém jsou zakreslena vratná posunutí \vec{r}_1 a \vec{r}_2 . (Obrázek je schématický a platí i pro zakřivené vazbové plochy nikoliv jen pro rovinu.)



Obr. 13

Pokud bychom v případě jednostranných vazeb uvažovali i nevratná virtuální posunutí, změnil by se tvar d'Alebertova principu (9) na tvar

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \dot{x}_i - F_i) \delta x^i \leq 0. \quad (10)$$

Na základě vztahu (9) lze najít i dva speciální případy d'Alebertova principu:

1. není žádná vazba - to znamená, že složky virtuálního posunutí $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ jsou libovolné a na sobě navzájem nezávislé. Vztah (9) pak lze psát ve tvaru

$$m_i \ddot{x}_i - F = 0 \quad (11)$$

pro všechna $i = 1, 2, \dots, 3N$. Získáme tak $3N$ na sobě nezávislých Newtonových rovnic.

2. není žádný pohyb - to znamená, že $\dot{x}_i = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, 3N$ a tedy platí

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x^i = 0. \quad (12)$$

Občas je vhodné takovou situaci (tj. silové působení bez pohybu) studovat: stabilita mostů, statické konstrukce (např. [vysílačů](#), stožárů vysokého napětí, ...) a podobně.

VZTAH (12) DEFINUJE PRINCIP VIRTUÁLNÍ PRÁCE, KTERÁ BY SE VYKONALA, KDYBY SE HMOTNÝ BOD VYCHÝLIL ZE SVÉHO ROVNOVÁŽNÉHO STAVU.

Tento poznatek odvodil Johann [Bernoulli](#) (1667 - 1748) v roce 1717, ale základy principu virtuální práce byly známy již od starověku.

Na základě vztahu (12) lze právě rovnovážný stav poznat: vztah (12) totiž v rovnovážném stavu musí platit pro všechna virtuální posunutí.

Je-li těleso v rovnovážném stavu (viz obr. 14), tak ať ho vychýlíme jakýmkoliv směrem, který [vazby systému](#) umožňují, tak se vždy vrátí do rovnovážného stavu. V případě nerovnovážného stavu (viz obr. 15) to neplatí.

V případě určitého typu sil se situace zjednoduší. Tyto síly se nazývají [konzervativní síly](#).

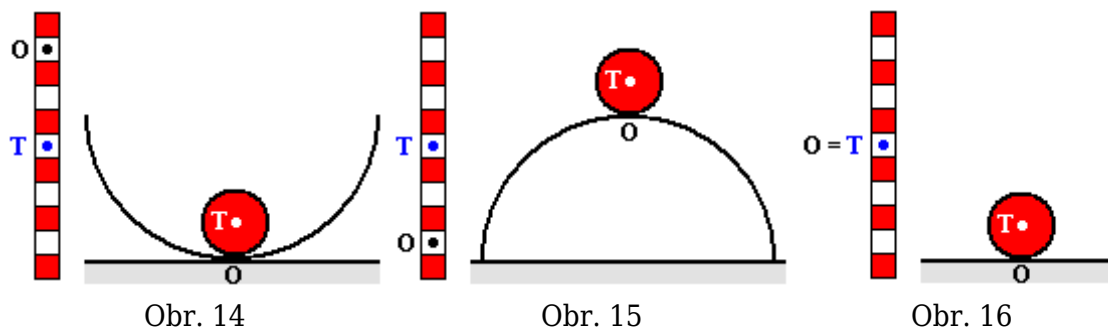
Pro konzervativní síly platí

$$\delta V = 0. \quad (13)$$

To ovšem znamená, že [potenciální energie](#) může mít extrém - existují tedy tři možnosti:

1. [potenciální energie](#) nabývá minima - jedná se o stabilní [rovnovážnou polohu](#) (viz obr. 14);
2. [potenciální energie](#) nabývá maxima - jedná se o [labilní](#) rovnovážnou polohu (viz obr. 15);
3. [potenciální energie](#) nemá extrém - jedná se o [indiferentní](#) rovnovážnou polohu (viz obr. 16).

Podmínka (13) udává podmínku [rovnováhy](#), ale není možné usoudit o jaký z právě uvedených tří možných případů se jedná.



Symbol δV se používá z historických důvodů a lze místo něj psát totální diferenciál dV .

Příklad: Rovnováha tyčky mezi stěnou a hranou

Homogenní tyč délky $2l$ je umístěna mezi stěnou a hranou, které jsou ve vzájemné vzdálenosti a . Při jaké poloze bude tyč v rovnovážné poloze?

Řešení: K řešení využijeme d'Alembertův princip v jeho speciální podobě podle vztahu (12). Hledáme rovnovážnou polohu, tj. stav systému (tyče) bez rotace a posunutí - budeme tedy uvažovat pouze jedinou sílu, která na tyč působí: gravitační sílu \vec{F}_g (viz obr. 17). Na základě této

úvahy a vztahu (12) lze psát $\sum_{i=1}^3 F_i \delta x^i = 0$, tj. $F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = 0$ a po dosazení: $0 - mg \delta y + 0 = 0$.

Odtud získáme $\delta y = 0$. To znamená, že rovnovážná poloha nastává tehdy, pokud se y-ová souřadnice polohy těžiště nemění.

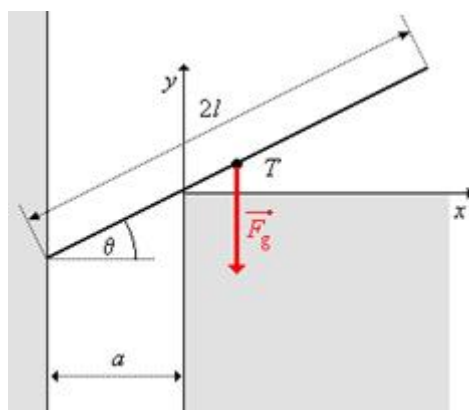
Představíme-li si pohyb tyče v souladu s danými vazbami, tak se její těžiště bude pohybovat po části kružnice. V místě, kde nastává rovnováha, se y-ová souřadnice jeho polohy skutečně nemění.

Polohu tyče je dobré popsat pomocí úhlu ϑ , který svírá tyč s kladnou částí osy x . Pak lze pro y-ovou souřadnici těžiště, která je závislá na úhlu ϑ , psát: $y = l \sin \vartheta - a \operatorname{tg} \vartheta$. Proto

$\delta y = \frac{dy}{d\vartheta} \delta \vartheta = \left(l \cos \vartheta - \frac{a}{\cos^2 \vartheta} \right) \delta \vartheta$. Vzhledem k tomu, že má platit $\delta y = 0$ pro všechna $\delta \vartheta$, musí být

$l \cos \vartheta - \frac{a}{\cos^2 \vartheta} = 0$. Odtud získáme, že $\cos \vartheta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$.

Tyč je v rovnovážné poloze, svírá-li s vodorovným směrem úhel ϑ , který je dán vztahem $\cos \vartheta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$.



Obr. 17

Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.