d’Alembertův princip

Autorem tohoto principu je Jean Le Rond d’Alembert (1717 - 1783), který tento princip publikoval v roce 1742.

SYSTÉM N HMOTNÝCH BODŮ SE VYVÍJÍ TAKOVÝM ZPŮSOBEM, ŽE PLATÍ:

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \ddot{x}_i - F_i\right) \delta x^i = 0 \,, \tag{9}$$

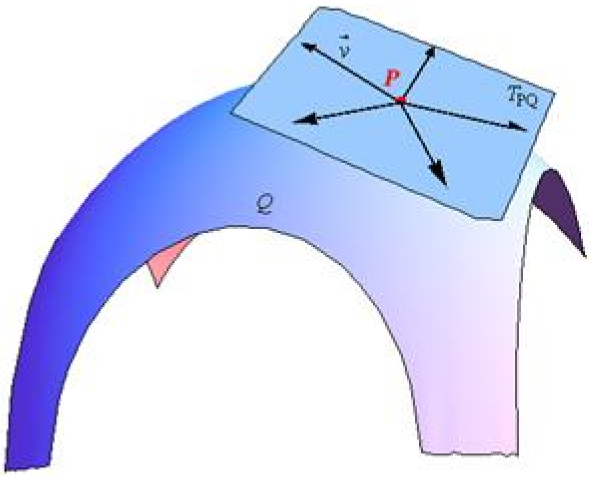
KDE δx^i JSOU SLOŽKY TZV. VIRTUÁLNÍHO POSUNUTÍ.

Rovnicí (9) tak vlastně d’Alembert přeformuloval Newtonovu mechaniku pomocí nového přístupu. Základní představa byla taková, že virtuální posunutí jsou nekonečně malá posunutí, která jsou v souladu s vazbami $\varphi_k\left(x^i, t\right) = 0$. Složka δx^i virtuálního posunutí tak vlastně odpovídá změně polohy hmotného bodu, tj. odpovídá změně souřadnice x^i.

Pokud tedy rovnice (9) platí pro všechna δx^i, odpovídají složky sil F_i složkám zrychlení $\ddot{x}_i$ a pohyb hmotného bodu lze uskutečnit. Na základě $\ddot{x}_i$ můžeme určit polohu hmotného bodu v čase a můžeme tak konstruovat jeho trajektorii implicitním způsobem.

Rovnice (9) je tedy splněna tehdy, pokud složky sil F_i a složky zrychlení $\ddot{x}_i$ jsou vzájemně dobře nastaveny.

Virtuální posunutí se složkami δx^i je pojem, který zavedl d’Alembert a jeho kolegové. Z hlediska současné interpretace lze na virtuální posunutí nahlížet jako na tečný vektor $\vec{v}$, který je sestrojen v daném bodě *P* plochy k této ploše, po níž se hmotný bod pohybuje. Jedná se o tzv. konfigurační prostor *Q*, který je popsán rovnicí $\varphi = 0$. Všechny uvažované tečné vektory pak leží v tečné rovině T_{PQ} sestrojené v bodě *P* (viz obr. 12). Proto platí $\vec{v} = \left(v^1, v^2, v^3, \ldots, v^{3N}\right) = \left(\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \ldots, \delta x^{3N}\right)$.



Obr. 12

Každý bod konfiguračního prostoru *Q* má svůj tečný prostor - tečnou rovinu T_{PQ}.

Konfigurační prostor tedy je plochou vazby popsané rovnicí $\varphi = 0$. V něm leží ty body, v nichž se může pohybující se hmotný bod nacházet.

V rovnici (9) tedy testujeme výchylku hmotného bodu z bodu, v němž se právě nachází, do všech tečných směrů popsaných tečnými vektory $\vec{v}$ ležícími v T_{PQ}.

D’ALEMBERTŮV PRINCIP JE EKVIVALENTNÍ LAGRANGEOVÝM ROVNICÍM I. DRUHU (VIZ ROVNICE (7) A (8)) A TEDY JE EKVIVALENTNÍ I NEWTONOVÝM ROVNICÍM S (HOLONOMNÍMI) VAZBAMI.

Toto tvrzení lze dokázat.

Nejdříve dokážeme implikaci, že z Lagrangeových rovnic I. druhu (tj. ze vztahů ([7]) a (8)) vyplývá d'Alembertův princip (vztah ([9])).

Rovnici $m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^{v} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$ upravíme na tvar $m_i \ddot{x}_i - F_i = \sum_{k=1}^{v} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$ a vynásobíme složkou virtuálního posunutí δx^i a sečteme: $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{k=1}^{v} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \delta x^i$. Nyní zaměníme pořadí sčítání na pravé straně rovnice $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{k=1}^{v} \lambda_k \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \delta x^i$. Pokud uvědomíme, že $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$ je složka gradientu φ a δx^i je složka tečného vektoru, můžeme psát $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{k=1}^{v} \lambda_k \operatorname{grad} \varphi_k \cdot \vec{v}$. Gradient plochy φ má ovšem směr normály k této ploše (viz vztah ([4])) a je tedy kolmý k tečně (resp. k tečné rovině) v daném bodě. Je tedy kolmý i k tečnému vektoru $\vec{v}$ a jejich skalární součin je nulový. Proto $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = 0$.

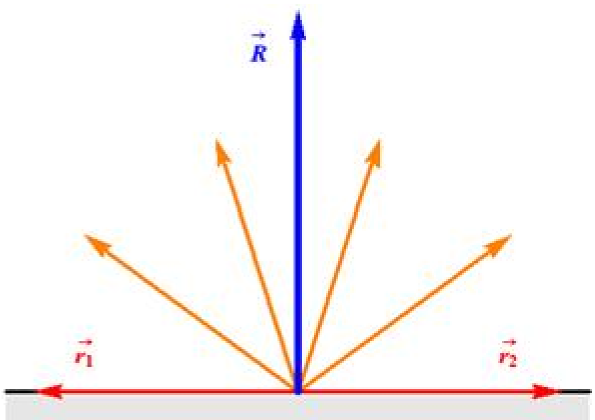
Důkaz obrácené implikace, tj. že ze vztahu ([9]) vyplývají vztahy (7) a (8) provedeme úvahou. Uvážíme dva případy:

1. neexistuje vazba - to znamená, že složky virtuálního posunutí $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ jsou navzájem nezávislé a tedy $m_i \ddot{x}_i - F_i = 0$ pro všechna *i* od 1 do 3*N*;
2. existují vazby - to znamená, že složky virtuálního posunutí $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ obecně nejsou navzájem nezávislé. Metodou Lagrangeových multiplikátorů lze dokázat, že musí existovat systém 3*N* + *v* rovnic, které splňují podmínky (7) a (8).

Fakt, že složky $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ nejsou obecně nezávislé si lze představit následující úvahou: když jdeme ze schodů, jdeme dopředu, ale zároveň jdeme dolů. Tj. díky existenci vazby (schody) nemůže naše [rychlost] mířit libovolným směrem. Složky $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ jsou složkami tečných vektorů. A vektor rychlosti je k dané ploše vždy tečný.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů se používá v matematické analýze při hledání vázaných extrémů funkcí více proměnných.

Rovnice ([9]) platí jen pro vratná virtuální posunutí δx^i, tj. taková posunutí, že k posunutí δx^i existuje také posunutí $-\delta x^i$. V případě [oboustranných vazeb] jsou všechna posunutí vratná. V případě [jednostranných vazeb] by vratná posunutí byla jen dvě - viz obr. 13, na kterém jsou zakreslena vratná posunutí $\vec{r_1}$ a $\vec{r_2}$. (Obrázek je schématický a platí i pro zakřivené vazbové plochy nikoliv jen pro rovinu.)



Obr. 13

Pokud bychom v případě jednostranných vazeb uvažovali i nevratná virtuální posunutí, změnil by se tvar d'Alembertova principu (9) na tvar

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \ddot{x}_i - F_i \right) \delta x^i \leq 0 \,. \tag{10}$$

Na základě vztahu (9) lze najít i dva speciální případy d'Alembertova principu:

1. není žádná vazba - to znamená, že složky virtuálního posunutí $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ jsou libovolné a na sobě navzájem nezávislé. Vztah (9) pak lze psát ve tvaru

$$m_i \ddot{x}_i - F = 0 \tag{11}$$

pro všechna $i = 1, 2, \dots, 3N$. Získáme tak 3*N* na sobě nezávislých Newtonových rovnic.

2. není žádný pohyb - to znamená, že $\ddot{x}_i = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, 3N$ a tedy platí

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x^i = 0 \,. \tag{12}$$

Občas je vhodné takovou situaci (tj. silové působení bez pohybu) studovat: stabilita mostů, statické konstrukce (např. vysílačů, stožárů vysokého napětí, ...) a podobně.

VZTAH (12) DEFINUJE PRINCIP VIRTUÁLNÍ PRÁCE, KTERÁ BY SE VYKONALA, KDYBY SE HMOTNÝ BOD VYCHÝLIL ZE SVÉHO ROVNOVÁŽNÉHO STAVU.

Tento poznatek odvodil Johann Bernoulli (1667 - 1748) v roce 1717, ale základy principu virtuální práce byly známy již od starověku.

Na základě vztahu (12) lze právě rovnovážný stav poznat: vztah (12) totiž v rovnovážném stavu musí platit pro všechna virtuální posunutí.

Je-li těleso v rovnovážném stavu (viz obr. 14), tak ať ho vychýlíme jakýmkoliv směrem, který vazby systému umožňují, tak se vždy vrátí do rovnovážného stavu. V případě nerovnovážného stavu (viz obr. 15) to neplatí.

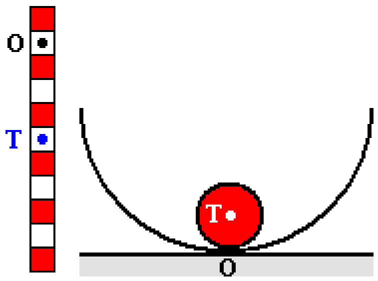
V případě určitého typu sil se situace zjednoduší. Tyto síly se nazývají konzervativní síly.
Pro konzervativní síly platí

$$\delta V = 0 \,. \tag{13}$$

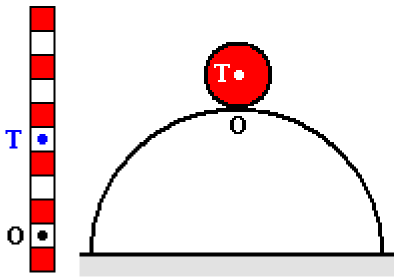
To ovšem znamená, že potenciální energie může mít extrém - existují tedy tři možnosti:

1. potenciální energie nabývá minima - jedná se o stabilní rovnovážnou polohu (viz obr. 14);
2. potenciální energie nabývá maxima - jedná se o labilní rovnovážnou polohu (viz obr. 15);
3. potenciální energie nemá extrém - jedná se o indiferentní rovnovážnou polohu (viz obr. 16).

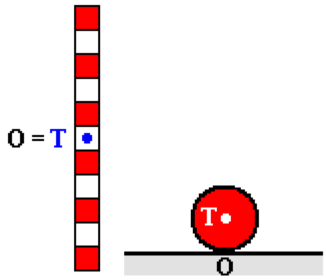
Podmínka (13) udává podmínku rovnováhy, ale není možné usoudit o jaký z právě uvedených tří možných případů se jedná.



Obr. 14



Obr. 15



Obr. 16

Symbol δV se používá z historických důvodů a lze místo něj psát totální diferenciál dV.

Příklad: Rovnováha tyčky mezi stěnou a hranou

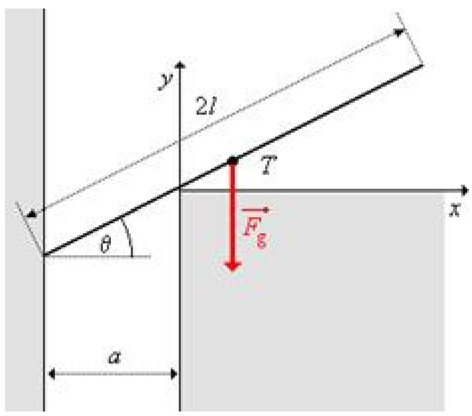
Homogenní tyč délky 2*l* je umístěna mezi stěnou a hranou, které jsou ve vzájemné vzdálenosti *a*. Při jaké poloze bude tyč v rovnovážné poloze?

Řešení: K řešení využijeme d'Alembertův princip v jeho speciální podobě podle vztahu (12). Hledáme rovnovážnou polohu, tj. stav systému (tyče) bez rotace a posunutí - budeme tedy uvažovat pouze jedinou sílu, která na tyč působí: gravitační sílu $\vec{F}_g$ (viz obr. 17). Na základě této úvahy a vztahu (12) lze psát $\sum_{i=1}^{3} F_i \delta x^i = 0$, tj. $F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = 0$ a po dosazení: $0 - mg\delta y + 0 = 0$. Odtud získáme $\delta y = 0$. To znamená, že rovhovážná poloha nastává tehdy, pokud se *y*-ová souřadnice polohy těžiště nemění.

Představíme-li si pohyb tyče v souladu s danými vazbami, tak se její těžiště bude pohybovat po části kružnice. V místě, kde nastává rovnováha, se *y*-ová souřadnice jeho polohy skutečně nemění.

Polohu tyče je dobré popsat pomocí úhlu ϑ, který svírá tyč s kladnou částí osy *x*. Pak lze pro *y*-ovou souřadnici těžiště, která je závislá na úhlu ϑ, psát: $y = l\sin\vartheta - a\,\mathrm{tg}\,\vartheta$. Proto $\delta y = \frac{dy}{d\vartheta}\delta\vartheta = \left(l\cos\vartheta - \frac{a}{\cos^2\vartheta}\right)\delta\vartheta$. Vzhledem k tomu, že má platit $\delta y = 0$ pro všechna $\delta\vartheta$, musí být $l\cos\vartheta - \frac{a}{\cos^2\vartheta} = 0$. Odtud získáme, že $\cos\vartheta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$.

Tyč je v rovnovážné poloze, svírá-li s vodorovným směrem úhel ϑ, který je dán vztahem $\cos\vartheta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$.



Obr. 17