Pohyb N hmotných bodů ve více dimenzích

Budeme uvažovat *N* hmotných bodů, které jsou podrobeny silám a vazbám a jejichž pohyb je popsán zobecněnými souřadnicemi (17). Tyto zobecněné souřadnice jsou svázány s kartézskými souřadnicemi vztahy (18). Odvození Lagrangeových rovnic druhého druhu pro soustavu hmotných *N* bodů bude velmi podobné jako odvození Lagrangeovy rovnice druhého druhu pro jeden hmotný bod. Proto bude odvození zde komentováno již méně.

Trajektorie hmotných bodů bude obecně popsána funkcemi

$$x^{i}(t) = x^{i}\left(q^{j}(t), t\right) \tag{31}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, 3N$ a $j = 1, 2, \ldots, n$.

Kinetickou energii dané soustavy hmotných bodů lze psát ve tvaru

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_{i}\left(\frac{dx^{i}}{dt}\right)^{2}, \tag{32}$$

který lze dále rozepsat do tvaru

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_{i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x^{i}}{\partial q^{k}}\frac{dq^{k}}{dt} + \frac{\partial x^{i}}{\partial t}\right)^{2}. \tag{33}$$

Pro hmotnosti platí: $m_1 = m_2 = m_3 = m_{\text{prvního hmotného bodu}}$, $m_4 = m_5 = m_6 = m_{\text{druhého hmotného bodu}}$, ...

Nyní přepíšeme vztah (33) pro kinetickou energii soustavy hmotných bodů v konkrétním čase t_0 a provedeme formální záměnu časové derivace funkce $\frac{dq^k}{dt}$ za zobecněnou rychlost $\dot{q}^k$. Dostaneme tak

$$T\left(q^{j}, \dot{q}^{j}, t_0\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_{i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x^{i}}{\partial q^{k}}\left(q^{j}(t_0), t_0\right)\dot{q}^{k} + \frac{\partial x^{i}}{\partial t}\left(q^{j}(t_0), t_0\right)\right)^{2}. \tag{34}$$

Nyní určíme výrazy $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}$ a $\frac{\partial T}{\partial q^j}$. Dostáváme

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{j}} = \sum_{i=1}^{3N} m_{i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x^{i}}{\partial q^{k}}\dot{q}^{k} + \frac{\partial x^{i}}{\partial t}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial q^{j}} \tag{35}$$

a

$$\frac{\partial T}{\partial q^{j}} = \sum_{i=1}^{3N} m_{i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x^{i}}{\partial q^{k}}\dot{q}^{k} + \frac{\partial x^{i}}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial q^{j}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x^{i}}{\partial q^{k}}\dot{q}^{k} + \frac{\partial x^{i}}{\partial t}\right). \tag{36}$$

Vztahy (35) a (36) byly odvozeny pro konkrétní čas t_0, nicméně tento čas byl vybrán libovolně. Proto tyto vztahy platí pro libovolný čas *t* a je možné přejít opět ke vztahům, které jsou závislé na čase. Vztahy (35) a (36) tedy lze vyjádřit ve tvarech

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{j}}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_{i}\frac{dx^{i}}{dt}\frac{\partial x^{i}}{\partial q^{j}} \tag{37}$$

a

$$\frac{\partial T}{\partial q^{j}}(t)=\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial q^{j}}\left(\frac{dx^i}{dt}\right). \tag{38}$$

Vyčíslením výrazu $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{j}}(t)\right)-\frac{\partial T}{\partial q^{j}}(t)$ (pro $j=1,2,\dots,n$) dostáváme $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{j}}(t)\right)-\frac{\partial T}{\partial q^{j}}(t)=\sum_{i=1}^{3N} m_i\left(\frac{d^2x^i}{dt^2}\frac{\partial x^i}{\partial q^j}+\frac{dx^i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\right)-\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)\right)$ a po úpravě získáme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{j}}(t)\right)-\frac{\partial T}{\partial q^{j}}(t)=\sum_{i=1}^{3N} m_i\frac{d^2x^i}{dt^2}\frac{\partial x^i}{\partial q^j}. \tag{39}$$

Na základě vztahu (39) můžeme definovat tzv. zobecněnou sílu.

ZOBECNĚNÁ SÍLA Q_j JE DEFINOVÁNA VZTAHEM

$$Q_j=\sum_{i=1}^{3N} F_i\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \tag{40}$$

PRO $j=1,2,\dots,n$.

Zobecněné síly Q_j nemusí být síly v pravém slova smyslu.

Nyní je již možné napsat Lagrangeovy rovnice druhého druhu.

LAGRANGEOVY ROVNICE II. DRUHU, KTERÉ POPISUJÍ POHYB SOUSTAVY N HMOTNÝCH BODŮ, SE NAZÝVAJÍ ROVNICE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{j}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^{j}}=Q_j \tag{41}$$

PRO $j=1,2,\dots,n$. PŘITOM T JE KINETICKÁ ENERGIE SOUSTAVY HMOTNÝCH BODŮ, q^j JSOU ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE A $\dot{q}^j$ JSOU ZOBECNĚNÉ RYCHLOSTI.

Tyto rovnice jsou tedy pohybovými rovnicemi, které popisují pohyb dané soustavy hmotných bodů. Rovnice (41) vyjadřují Lagrangeovy rovnice II. druhu v nejobecnějším tvaru, který lze v určitých speciálních případech zjednodušit (viz 3.4).

Rovnice (41) tvoří soustavu *n* obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé funkce $q^j=q^j(t)$ (pro $j=1,2,\dots,n$).

Na první pohled by se mohlo zdát, že to jsou rovnice parciální, protože v rovnicích (41) vystupují parciální derivace. Zápis $\frac{\partial T}{\partial q^j}$ resp. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}$ představuje ovšem jen návod (pomůcku) na získání derivace kinetické energie. Samotné neznámé funkce $q^j=q^j(t)$ jsou závislé jen na čase, takže v upravených rovnicích (tj. už po provedení naznačených parciálních derivací) vystupují jen totální derivace q^j podle času.