Síly, které mají zobecněný potenciál

Nyní budeme předpokládat, že

$$V = V\left(q^j, \dot{q}^j, t\right), \tag{67}$$

tj. potenciální energie V závisí i na zobecněné rychlosti a na čase (na rozdíl od pole konzervativních sil). Přitom V je taková funkce, že splňuje vztah (46), ale v tomto případě obecně $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} \neq 0$. Potom opět platí Lagrangeovy rovnice druhého druhu ve tvaru (47) a

$$L\left(q^j, \dot{q}^j, t\right) = T\left(q^j, \dot{q}^j, t\right) - V\left(q^j, \dot{q}^j, t\right). \tag{68}$$

Tato situace, v níž platí závislost (67), je v přírodě realizována pouze v případě elektromagnetismu. Zobecněný potenciál má Lorentzova síla působící na částici s elektrickým nábojem e, která se pohybuje rychlostí $\vec{v}$ v elektromagnetickém poli, jehož elektrická intenzita je $\vec{E}$ a magnetická indukce je $\vec{B}$.

PRO LORENTZOVU SÍLU

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{69}$$

EXISTUJE ZOBECNĚNÝ POTENCIÁL VE TVARU

$$V = e\left(\varphi - \vec{v}.\vec{A}\right), \tag{70}$$

KDE φ JE POTENCIÁL ELEKTRICKÉHO POLE A $\vec{A}$ JE VEKTOROVÝ POTENCIÁL. PRO TYTO POTENCIÁLY PŘITOM PLATÍ

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ a } \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{71}$$

Důkaz tvrzení, že zobecněný potenciál Lorentzovy síly lze definovat vztahem (70), spočívá v rozepsání rychlosti a vektorového potenciálu v kartézských souřadnicích a dosazení do vztahu (46). Výsledný vztah by měl popisovat Lorentzovu sílu danou vztahem (69).

Veličiny φ a A je nutno chápat jako pomocné veličiny, které nejsou jednoznačné, protože je možné je přeškálovat a volit tak, aby počítání s nimi bylo pokud možno co nejjednodušší. Pokud se tyto veličiny dobře zvolí, zjednoduší se i výpočty v tom smyslu, že budeme mít méně rovnic k řešení. Měřitelnými veličinami jsou veličiny $\vec{E}$ a $\vec{B}$.

Velmi snadnou úpravou vztahů (71) lze získat vyjádření dvou Maxwellových rovnic. Platí totiž $\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{rot}\left(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi - \operatorname{rot}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 - \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ a také $\operatorname{div}\vec{B} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$ (identicky). Takže jsme získali dvě z Maxwellových rovnic: $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ a $\operatorname{div}\vec{B} = 0$.

Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole jsou tak obecné, že je možné s nimi počítat i ve speciální teorii relativity i v obecné teorii relativity bez výraznějších změn. Newtonův popis mechaniky takto obecný není a pro fyzikální popis v rámci teorie relativity je naprosto nevhodný a nepoužitelný.