

## Pohyb hmotného objektu v poli centrální síly

Jak bylo ukázáno, [pohyb hmotného bodu](#) v [poli centrální síly](#) je pohyb rovinný. To znamená, že pohyb hmotného bodu (resp. hmotného objektu) o hmotnosti  $m$  v tomto poli můžeme popsat pomocí polárních [souřadnic](#)  $r$  a  $\varphi$ . [Lagrangián](#) tedy lze psát ve tvaru (79), tj.  $L = \frac{1}{2}m\{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\} - V(r)$ . [Lagrangeova funkce](#) ovšem nezávisí na souřadnici  $\varphi$  - tj.  $\varphi$  je [cyklická souřadnice](#). Můžeme tedy psát první [integrál pohybu](#) ve tvaru

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = l = \text{konst.}, \quad (82)$$

kde  $l$  je moment [hybnosti](#). Vztah (82) tedy vyjadřuje [zákon](#) zachování momentu hybnosti.

Lagrangián (79) nezávisí ovšem přímo ani na čase, a proto můžeme psát [zobecněnou energii](#)  $h$  pro pohyb hmotného objektu v poli centrální síly ve tvaru

$$h = \frac{1}{2}m\{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\} + V(r) = E = \text{konst.}, \quad (83)$$

neboť se nacházíme v poli [konzervativních sil](#). Ze vztahu (82) můžeme vyjádřit

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}, \quad (84)$$

čímž jsme získali vyjádření časové změny úhlu v závislosti na vzdálenosti od centrálního tělesa a na hmotnosti uvažovaného hmotného objektu.

Získali jsme tedy velikost [úhlové rychlosti](#) pohybu daného objektu, tj. [velikost rychlosti](#), s níž se tento objekt pohybuje kolem centrálního tělesa. V této [rychlosti](#) není zahrnut radiální pohyb (tj. přibližování nebo oddalování od centrálního tělesa)!

Dosažením vztahu (84) do rovnice (83) získáme rovnici  $\frac{1}{2}m\left\{\dot{r}^2 + r^2\frac{l^2}{m^2r^4}\right\} + V(r) = E$ , odkud můžeme vyjádřit  $\dot{r}^2$  ve tvaru  $\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left\{E - V(r)\right\} - \frac{l^2}{m^2r^2}$ , který lze upravit na tvar

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left\{E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right\}. \quad (85)$$

S tímto vztahem nyní budeme pracovat dále, neboť naším cílem je popsat pohyb, tj. nalézt závislost souřadnice  $r$  (resp.  $\varphi$ ) na čase. Proto vztah (85) odmocníme a přepíšeme do tvaru vhodného pro další výpočet  $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left\{E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right\}}$ . Pomocí separace proměnných bychom

získali rovnici  $dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left\{E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right\}}}$ , kterou by bylo možné řešit integrací a získali bychom

$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left\{E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right\}}} = g(r)$  a tedy  $r = g^{-1}(t)$ . Výpočet funkce  $g(r)$  je ovšem technicky velmi

zdlouhavý. Proto je lepší nevyšetřovat závislosti  $r(t)$  (resp.  $\varphi(t)$ ), ale najít rovnou tvar [trajektorie](#), tj. hledat závislost  $r(\varphi)$ .

Pro snadnější výpočet zavedeme funkci  $u$  proměnné  $\varphi$  předpisem

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}. \quad (86)$$

Potom můžeme psát  $r = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{u(\varphi)} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{u(\varphi(t))} \right) = -\frac{1}{u^2(\varphi(t))} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi}$ . Po dosazení ze vztahu (84) dostaneme  $r = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{l}{mr^2} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{l u^2}{m} = -\frac{l}{m} \frac{du}{d\varphi}$  a dosadíme do (85). S využitím (86) tedy získáme  $\frac{l^2}{m^2} \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2}{m} \left( E - \left( V(u) + \frac{l^2 u^2}{2m} \right) \right)$  a odtud již snadnou úpravou získáme

$$\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 = \frac{2m}{l^2} (E - V(u)). \quad (87)$$

Derivací obou stran rovnice (87) podle proměnné  $\varphi$  získáme  $2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 2u \frac{du}{d\varphi} = -\frac{2m}{l^2} \frac{dV(u)}{du} \frac{du}{d\varphi}$ .

Bez újmy na obecnosti lze tuto rovnici vydělit výrazem  $2 \frac{du}{d\varphi}$ , čímž získáme vztah

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{dV(u)}{du}, \quad (88)$$

což je tzv. **Binetův vzorec** pro trajektorie pohybujících se objektů v poli centrální síly.

S využitím dvou „triků“ (substituce (86) a derivace rovnice (87)) jsme získali důležitý vztah (88), který má význam nejen v (teoretické) [mechanice](#), ale také např. i v [atomové fyzice](#) (tzv. [Rutherfordův rozptyl](#)).