Pohyb hmotného objektu v poli centrální cíly

Jak bylo ukázáno, pohyb hmotného bodu v poli centrální síly je pohyb rovinný. To znamená, že pohyb hmotného bodu (resp. hmotného objektu) o hmotnosti *m* v tomto poli můžeme popsat pomocí polárních souřadnic *r* a φ. Lagrangián tedy lze psát ve tvaru (79), tj. $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$. Lagrangeova funkce ovšem nezávisí na souřadnici φ - tj. φ je cyklická souřadnice. Můžeme tedy psát první integrál pohybu ve tvaru

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = l = konst.\,, \tag{82}$$

kde *l* je moment hybnosti. Vztah (82) tedy vyjadřuje zákon zachování momentu hybnosti.

Lagrangián (79) nezávisí ovšem přímo ani na čase, a proto můžeme psát zobecněnou energii *h* pro pohyb hmotného objektu v poli centrální síly ve tvaru

$$h = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = E = konst.\,, \tag{83}$$

neboť se nacházíme v poli konzervativních sil. Ze vztahu (82) můžeme vyjádřit

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}\,, \tag{84}$$

čímž jsme získali vyjádření časové změny úhlu v závislosti na vzdálenosti od centrálního tělesa a na hmotnosti uvažovaného hmotného objektu.

Získali jsme tedy velikost úhlové rychlosti pohybu daného objektu, tj. velikost rychlosti, s níž se tento objekt pohybuje kolem centrálního tělesa. V této rychlosti není zahrnut radiální pohyb (tj. přibližování nebo oddalování od centrálního tělesa)!

Dosazením vztahu (84) do rovnice (83) získáme rovnici $\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\frac{l^2}{m^2r^4}\right) + V(r) = E$, odkud můžeme vyjádřit $\dot{r}^2$ ve tvaru $\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(E - V(r)\right) - \frac{l^2}{m^2r^2}$, který lze upravit na tvar

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right). \tag{85}$$

S tímto vztahem nyní budeme pracovat dále, neboť naším cílem je popsat pohyb, tj. nalézt závislost souřadnice *r* (resp. φ) na čase. Proto vztah (85) odmocníme a přepíšeme do tvaru vhodného pro další výpočet $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right)}$. Pomocí separace proměnných bychom získali rovnici $dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right)}}$, kterou by bylo možné řešit integrací a získali bychom $t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right)}} = g(r)$ a tedy $r = g^{-1}(t)$. Výpočet funkce $g(r)$ je ovšem technicky velmi zdlouhavý. Proto je lepší nevyšetřovat závislosti $r(t)$ (resp. $\varphi(t)$), ale najít rovnou tvar trajektorie, tj. hledat závislost $r(\varphi)$.

Pro snadnější výpočet zavedeme funkci *u* proměnné φ předpisem

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}. \qquad (86)$$

Potom můžeme psát $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u(\varphi)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u(\varphi(t))}\right) = -\frac{1}{u^2(\varphi(t))}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}$. Po dosazení ze vztahu (84) dostaneme $\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\frac{l}{mr^2} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\frac{lu^2}{m} = -\frac{l}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$ a dosadíme do (85). S využitím (86) tedy získáme $\frac{l^2}{m^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - \left(V(u) + \frac{l^2u^2}{2m}\right)\right)$ a odtud již snadnou úpravou získáme

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{l^2}\left(E - V(u)\right). \qquad (87)$$

Derivací obou stran rovnice (87) podle proměnné φ získáme $2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + 2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{2m}{l^2}\frac{\mathrm{d}V(u)}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$. Bez újmy na obecnosti lze tuto rovnici vydělit výrazem $2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$, čímž získáme vztah

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2}\frac{\mathrm{d}V(u)}{\mathrm{d}u}, \qquad (88)$$

což je tzv. **Binetův vzorec** pro trajektorie pohybujících se objektů v poli centrální síly.

S využitím dvou „triků“ (substituce (86) a derivace rovnice (87)) jsme získali důležitý vztah (88), který má význam nejen v (teoretické) mechanice, ale také např. i v atomové fyzice (tzv. Rutherfordův rozptyl).
