Obecné odvození

Potenciální energie tělesa (např. planeta) o hmotnosti *m*, které se pohybuje kolem centrálního tělesa (např. Slunce) o hmotnosti *M* ve vzdálenosti *r*, je dána vztahem

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{\alpha}{r}, \tag{89}$$

kde *G* je gravitační konstanta.

Tvar trajektorie tělesa, které se pohybuje v poli centrální síly, získáme pomocí Binetova vzorce (88). S využitím substituce (86) můžeme psát $V = -\alpha u$ a tedy $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}u} = -\alpha$. Dosazením do (88) získáme rovnici pro neznámou $u(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{\alpha m}{l^2}, \tag{90}$$

která má řešení ve tvaru $u = u_0 + u_\mathrm{p} = C\cos\varphi + \frac{\alpha m}{l^2}$. S využitím substituce (86) tedy dostáváme $r = \frac{1}{C\cos\varphi + \frac{\alpha m}{l^2}} = \frac{\frac{l^2}{\alpha m}}{\frac{l^2 C}{\alpha m}\cos\varphi + 1}$, což můžeme zapsat v zjednodušeném tvaru

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}, \tag{91}$$

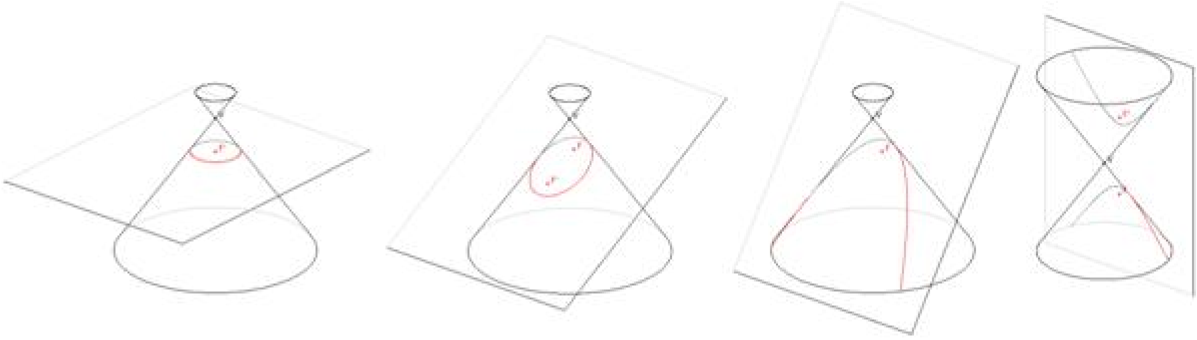
kde

$$p = \frac{l^2}{\alpha m} = \frac{l^2}{GMm^2}. \tag{92}$$

Je důležité si uvědomit, že *r*, *u* a φ jsou funkce závislé na čase.

Konstantu ε určíme tak, že dosadíme řešení (91) s využitím substituce (86) do rovnice (87). Předtím vyjádříme $u = \frac{1 + \varepsilon\cos\varphi}{p}$ a $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{\varepsilon\sin\varphi}{p}$. Po dosazení do (87) dostaneme $\frac{\varepsilon^2\sin^2\varphi}{p^2} + \frac{1 + 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2\cos^2\varphi}{p^2} = \frac{2m}{l^2}\left(E + \alpha\frac{1 + \varepsilon\cos\varphi}{p}\right)$. Dále můžeme psát $\varepsilon^2 + 1 + 2\varepsilon\cos\varphi = \frac{2mp^2}{l^2}E + \frac{2m\alpha p}{l^2}(1 + \varepsilon\cos\varphi)$ a s využitím vztahu (92) upravit na tvar $\varepsilon^2 - 1 + 2(1 + \varepsilon\cos\varphi) = \frac{2mp^2}{l^2}E + 2(1 + \varepsilon\cos\varphi)$, odkud

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2mp^2}{l^2}E = \frac{2l^2}{\alpha^2 m}E = \frac{2l^2}{G^2M^2m^3}E. \tag{93}$$



Obr. 36

Rovnice (91) spolu s podmínkami (92) a (93) vyjadřuje rovnici kuželosečky v polárních souřadnicích. Parametr *p* přitom určuje velikost kuželosečky, zatímco parametr ε, který se nazývá **numerická excentricita**, určuje celkovou mechanickou energii tělesa, která se díky platnosti zákona zachování mechanické energie zachovává. V závislosti na parametru ε lze přitom získat jednu ze čtyř kuželoseček (viz obr. 36):

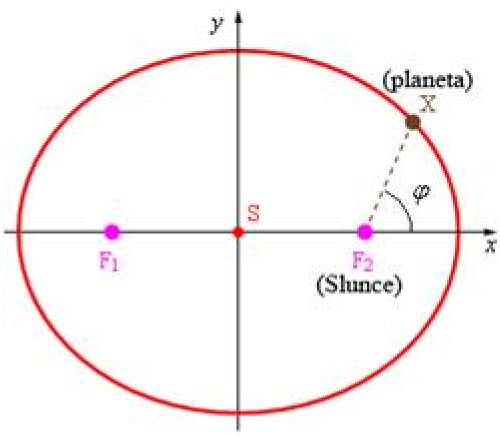
1. pro $\varepsilon = 0$ kružnici - což je křivka, po níž se pohybuje těleso s minimální energií, kterou je možné odvodit ze vztahu (93):

$$E_{min} = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2l^2}; \qquad (94)$$

2. pro $\varepsilon \in \langle 0;1)$ elipsu, přičemž $\varphi = 0$ popisuje perihélium trajektorie daného tělesa a $\varphi = \pi$ odpovídá aféliu dané trajektorie (viz obr. 37). Energie, kterou má pohybující se těleso, je záporná.
3. pro $\varepsilon = 1$ parabolu, protože pro $\varphi = \pi$ se trajektorii otvírá. Energie tělesa je nulová.
4. pro $\varepsilon > 1$ hyperbolu, trajektorie se otvírá dříve než při $\varphi = \pi$ a těleso má kladnou energii.

Typ kuželosečky v závislosti na energii tělesa lze určit pomocí efektivního potenciálu.

Z obr. 36 je vidět, že kuželosečky lze získat i tak, jak vyplývá z jejich názvu: lze „seknout“ kužel rovinou, která má pro každou kuželosečku určitou speciální polohu.



Obr. 37

Při odvozování obecného tvaru trajektorie jsme se mohli omezit na popis pomocí dvou souřadnic, neboť pohyb v poli centrální síly je vždy pohyb rovinný. Navíc popis pomocí lagrangeových rovnic vede na dva integrály pohybu - v našem konkrétním případě se zachovává moment hybnosti *l* a celková mechanická energie *E*.

Na základě obecného odvození a na základě geometrického významu řešení (91) lze nyní formulovat Keplerovy zákony, které popisují pohyb planet ve Sluneční soustavě.

Autorem Kepleových zákonů je německý matematik Johannes Kepler (1571 - 1630). Odvodil je na základě pozorování, která prováděl dánský astronom Tycho Brahe. První a druhý Keplerův zákon byly publikovány v *Astronomia nova* (*Nová astronomie*) vydané v roce 1609 v Praze, třetí Keplerův zákon pak v roce 1619 v Linci v díle *Harmoniae mundi* (*Harmonie světa*).
