Rozptyl nabitých částic

Dalším případem pohybu v centrálním poli je pohyb částice o hmotnosti *m* a s nábojem Q_2 v elektrostatickém poli buzeném částicí s nábojem Q_1 o hmotnosti *M*. Bez újmy na obecnosti budeme uvažovat dvě kladně nabité částice, z nichž ta s nábojem Q_1 má výrazně vyšší hmotnost ve srovnání s částicí s nábojem Q_2, tj.

$$M \gg m\,. \tag{109}$$

Tato podmínka umožní řešit úlohu tak, že budeme uvažovat částici s nábojem Q_2, která bude přilétat z velké vzdálenosti k částici s nábojem Q_1, která je v klidu.

Vzhledem k podmínce (109), lze považovat částici s nábojem Q_1 za nehybnou. Na obě částice sice působí stejně velká elektrostatická síla, ale vlivem své větší hmotnosti má částice s nábojem Q_1 ve srovnání s druhou částicí zanedbatelné zrychlení. Proto jí lze považovat za nehybnou. V praxi to znamená, že např. na jádro zlata bude nalétávat jádro helia. Tento experiment na začátku 20. století prováděl Rutherford.

Potenciální energie vyplývající z Coulombova zákona má tvar

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\,, \tag{110}$$

který je formálně podobný Newtonovské potenciální energii v gravitačním poli (viz vztah (89)) a ve kterém

$$\alpha = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\,. \tag{111}$$

Coulombická potenciální energie je ovšem kladná, neboť interakce mezi dvěma kladně nabitými částicemi je odpudivá (na rozdíl od přitažlivé gravitační síly působící mezi tělesem obíhajícím kolem centra gravitačního silového pole a tímto centrem).

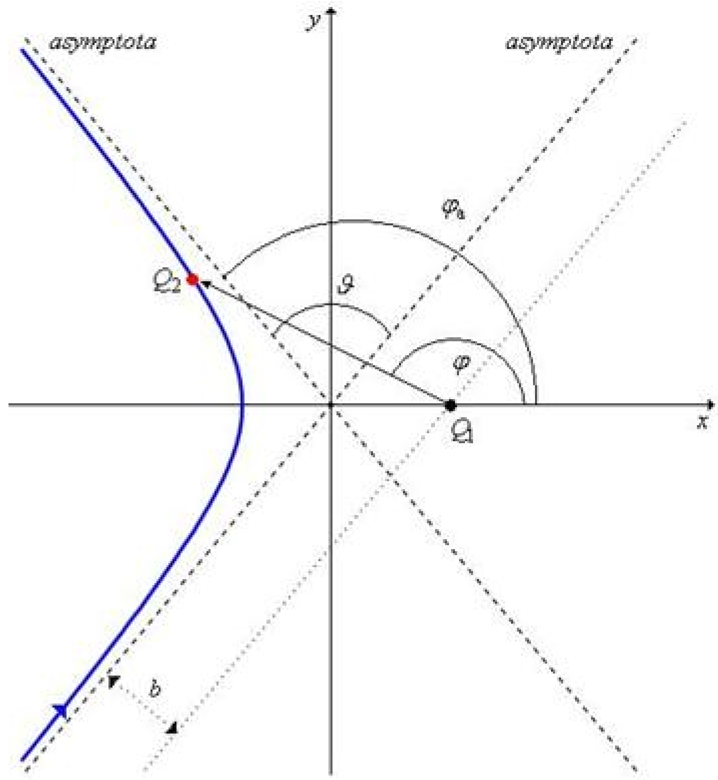
Energie částice s nábojem Q_2 je kladná, ale trajektorie, po níž se bude v silovém poli částice s nábojem Q_1 pohybovat, bude splňovat vztah (91). Částice s nábojem Q_2 se tedy pohybuje po kuželosečce. Vzhledem ke kladné energii částice je touto kuželosečkou hyperbola. Pro popis trajektorie bude důležitý **úhel odklonu** ϑ částice s nábojem Q_2 v poli částice s nábojem Q_1 (viz obr. 45). To znamená, že nás zajímá směr vstupní asymptoty a výstupní asymptoty hyperboly, po níž se částice pohybuje. Vzhledem k tomu, že částice s nábojem Q_2 přilétá z velké vzdálenosti a po odchýlení své trajektorie zase odlétá do velké vzdálenosti, můžeme asymptoty charakterizovat podmínkou $r \to \infty$. Ze vztahu (91) pak vyplývá

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\,, \tag{112}$$

kde φ je úhel určující polohu pohybující se částice s nábojem Q_2 (viz obr. 45). Úhel odklonu ϑ je dán vztahem

$$\varphi_a = \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{2}\,, \tag{113}$$

kde φ_a je směrový úhel výstupní asymptoty.



Obr. 45

S využitím vztahů (111) a (112) můžeme psát $\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} = \mathrm{tg}\left(\varphi_a - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cos\varphi_a}{\sin\varphi_a} = -\frac{\cos\varphi_a}{\sqrt{1-\cos^2\varphi_a}} = \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$. Po dosazení ze vztahu (93) dostáváme

$$\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{\alpha^2 m}{2l^2 E}}\,. \tag{114}$$

Nyní je nutné vyjádřit celkovou energii *E* částice s nábojem Q_2 a její moment hybnosti *l*. Tyto zachovávající se fyzikální veličiny stačí určit v místech trajektorie, v nichž jsou snadno určitelné.

Celková energie *E* částice i moment hybnosti *l* jsou v centrálním silovém poli integrály pohybu, proto platí jejich zákony zachování - tj. zákon zachování energie a zákon zachování momentu hybnosti.

Částice s nábojem Q_2 přilétá z velké vzdálenosti s počáteční rychlostí o velikosti v_∞. Pro vzdálenost $r \to \infty$ je potenciální energie *V* částice (na základě (110)) nulová. Takže celková energie *E* je rovna kinetické energii částice, tedy

$$E = T = \frac{1}{2}mv_\infty^2 = konst. \tag{115}$$

Analogicky získáme i moment hybnosti částice ve vzdálenosti $r \to \infty$:

$$l = mv_\infty b\,, \tag{116}$$

kde *b* je tzv. **záměrná vzdálenost** (**impaktní parametr**) určující vzdálenost vstupní asymptoty od částice s nábojem Q_1 (která je v klidu).

Dosazením ze vztahů (111), (115) a (116) do vztahu (114) postupně získáme

$$\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} = \left|\frac{\alpha}{l}\right|\sqrt{\frac{m}{2\frac{1}{2}mv_\infty^2}} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mv_\infty bv_\infty}$$, takže

$$\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 mv_\infty^2 b}\,. \tag{117}$$

Fakt, že uvedený vztah je kvalitativně správný v závislosti na záměrné vzdálenosti *b*, lze ověřit na dvou význačných hodnotách vzdálenosti *b*:

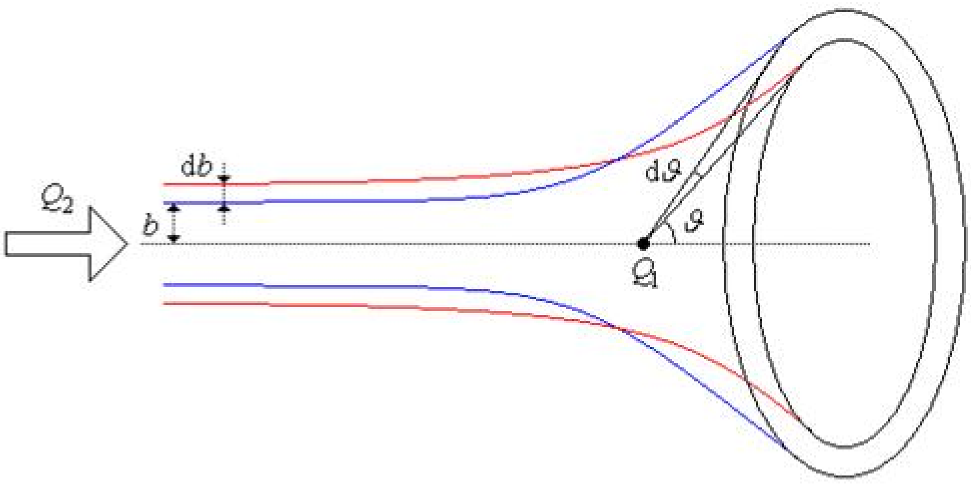
1. pro $b \to \infty$ (tj. částice nalétává na stojící částici ve velké vzdálenosti) je $\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} = 0$ a tedy $\vartheta = 0$ (pohybující se částice není částicí v klidu ovlivněna);
2. pro $b \to 0$ (tj. částice nalétává přímo na stojící částici) je $\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} \to \infty$ a tedy $\vartheta = \pi$ (pohybující se částice se od částice nabité nábojem stejného znaménka, která je v klidu, odráží zpět do směru, odkud přiletěla).

Ve skutečnosti, pokud se provádějí tyto experimenty, nalétává velké množství částic najednou na větší množství center a zkoumá se vzájemná interakce všech nalétávajících částic s centry. Nalétávající částice mají různé hodnoty záměrné vzdálenosti *b* a proto je rozumné zkoumat závislost záměrné vzdálenosti na úhlu, do kterého se tyto částice rozptýlí. Jsou-li záměrné vzdálenosti *N* nalétávajících částic v intervalu $(b; b+\mathrm{d}b)$, rozptýlí se d*N* těchto částic do úhlu $(\vartheta, \vartheta+\mathrm{d}\vartheta)$ (viz obr. 46). Je-li plošná hustota center *n*, můžeme definovat účinný průřez $\mathrm{d}\sigma$ vztahem

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}N}{nN}\,; \tag{118}$$

přitom $[\mathrm{d}\sigma] = \mathrm{m}^2$.

Účinný průřez udává plochu, jakou si navzájem nastavují nalétávající částice a centra, která jsou v klidu. Účinný průřez lze vysvětlit i na příkladu člověka, na kterého je veden útok míčem. Stojící člověk má větší plochu a tedy i větší pravděpodobnost zásahu míčem (tj. má větší účinný průřez). Stočí-li se do „klubíčka“, jeho plocha, kterou nastavuje letícímu míči, se zmenší a tedy se zmenší i jeho účinný průřez.



Obr. 46

Letící částice, které se rozptýlí do úhlu $(\vartheta, \vartheta+\mathrm{d}\vartheta)$, nalétávají z mezikruží, jehož účinný průřez je

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi b\,\mathrm{d}b\,. \tag{119}$$

Účinný průřez má význam plochy - proto je účinný průřez v tomto případě roven ploše mezikruží.

Plocha mezikruží ohraničená kružnicemi s poloměry *r* a $r + \mathrm{d}r$ je $\mathrm{d}S = S_1 - S_2$. Po dosazení tedy máme $\mathrm{d}S = \pi\left(r + \mathrm{d}r\right)^2 - \pi r^2 = \pi\left(r^2 + 2r.\mathrm{d}r + \left(\mathrm{d}r\right)^2 - r^2\right) \doteq 2\pi r.\mathrm{d}r$ pro $\mathrm{d}r \to 0$.

Ze vztahu (117) můžeme vyjádřit $b = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v_\infty^2}\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}$ a dosadit do vztahu (119). K tomu je ještě nutné vyjádřit diferenciál $\mathrm{d}b = \frac{1}{2}\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v_\infty^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\mathrm{d}\vartheta$. Po dosazení tedy máme $\mathrm{d}\sigma = 2\pi\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v_\infty^2}\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}.\frac{1}{2}\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v_\infty^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\mathrm{d}\vartheta$, takže dostáváme

$$\mathrm{d}\sigma = \pi\left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin^3\frac{\vartheta}{2}}\mathrm{d}\vartheta. \qquad (120)$$

Vztah (120) je **Rutherfordův vztah pro rozptyl** kladných částic na kladných centrech. Zkoumání tohoto rozptylu se stalo významným na počátku 20. století, kdy bylo na základě podobných experimentů objeveno jádro atomu. V roce 1911 se o to zasloužil Ernst Rutherford a jeho kolegové. Tím byla odstartována další část vývoje fyziky. V současné době se tyto rozptylové experimenty provádějí i na urychlovačích částic, neboť s rostoucí energií, kterou pohybující se částice má, roste velikost její rychlosti. Po vzájemných srážkách takto urychlených částic lze studovat hmotu do větších detailů.

Dodáním větší energie stojící částici se tato částice rozletí na více menších částic a tyto menší částice je možné dále studovat.

Při pečlivé analýze uvedeného experimentu je nutné vzít do úvahy, že se ve skutečnosti pohybují obě částice - jak ta, která nalétává, tak i centrum, na které druhá částice nalétává. Pokud ovšem platí podmínka (109), lze úlohu studovat výše uvedeným postupem.

Pokud podmínka (109) nebude splněna, je nutné situaci popisovat analogicky jako se popisuje problém dvou těles.