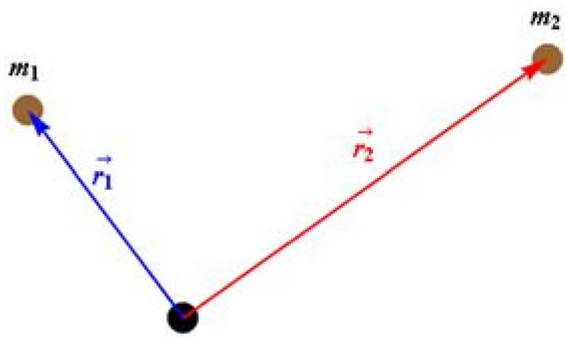
Problém dvou těles

Uvažujme nyní pohyb dvou těles o srovnatelných hmotnostech m_1 a m_2, jejichž polohy jsou popsány polohovými vektory $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ (viz obr. 47).

Takovými tělesy může být např. dvojice Země - Měsíc, Pluto - Cháron, dvojhvězda, ...



Obr. 47

Systém má celkem 6 stupňů volnosti (na každé těleso připadají 3 stupně volnosti) a budeme uvažovat pouze vzájemné silové působení (nebudeme tedy započítávat např. vliv centra uvažovaného centrálního pole).

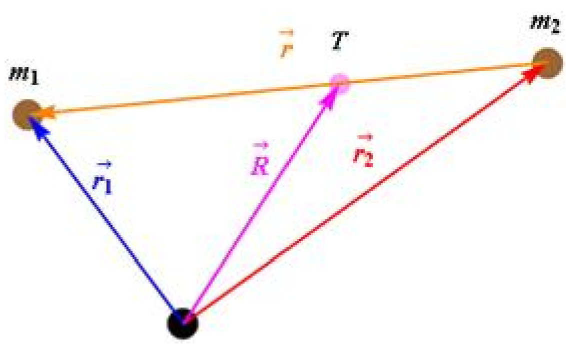
Tři stupně volnosti připadající na každé těleso odpovídají tomu, že každé z těles se může pohybovat ve třech navzájem nezávislých směrech.

Můžeme tedy napsat lagrangián této situace ve tvaru

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} + \frac{G m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|} \,. \tag{121}$$

Tento tvar lagrangiánu ale není příliš vhodný pro další výpočty - zobecněné souřadnice $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ nejsou zvoleny nejlépe. Lepší volba by byla zvolit relativní souřadnice $\vec{R}$ a $\vec{r}$, kde $\vec{R}$ je poloha těžiště systému uvažovaných těles a $\vec{r}$ je relativní poloha těles vůči sobě (viz obr. 48). Převodní vztahy tedy jsou

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{a} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \,. \tag{122}$$



Obr. 48

Na základě vztahů (122) (tj. řešením soustavy rovnic pro neznámé $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$) získáme:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad \text{a} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \,. \tag{123}$$

Dosazením rovnic (123) do lagrangiánu ve tvaru (121) dostaneme lagrangián ve tvaru

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{G m_1 m_2}{r} \,, \tag{124}$$

který nezávisí na zobecněné souřadnici *R*. To ovšem znamená, že

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = (m_1 + m_2)\dot{\vec{R}} = konst. \tag{125}$$

je integrál pohybu. Konkrétně vztah (125) je vyjádřením zákona zachování hybnosti. Jestliže se ovšem zachovává hybnost, nepůsobí na uvažovanou soustavu těles okolní tělesa silou a soustava sama se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem. Proto se rovnoměrně přímočaře pohybuje i těžiště *T* soustavy uvažovaných těles. Bez újmy na obecnosti tedy můžeme vyšetřovat pohyb těles o hmotnostech m_1 a m_2 v těžišťové soustavě. To ovšem znamená, že $\vec{R} = \vec{o}$.

V těžišťové soustavě se totiž těžiště nepohybuje.

Skutečnost, že si můžeme zvolit libovolnou vztažnou soustavu, v níž budeme pohyb vyšetřovat, vyplývá z relativnosti pohybu a Galileiho transformace mezi dvěma soustavami souřadnic.

Vyjádření (123) původních vektorů $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ v závislosti na nově zvolených zobecněných souřadnicích $\vec{R}$ a $\vec{r}$ se tedy zjednoduší:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad \text{a} \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \,. \tag{126}$$

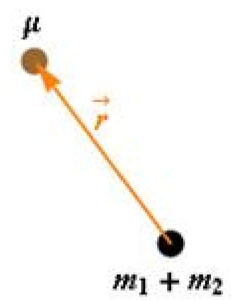
Tím se podařila redukce původní úlohy na úlohu jednodušší, jejíž lagrangián bude mít tvar

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + \frac{G m_1 m_2}{r} \,, \tag{127}$$

kde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{128}$$

je tzv. **redukovaná hmotnost**. Tím jsme získali úlohu, která je analogická jako Keplerova úloha: jedná se o pohyb tělesa s hmotností μ v centrálním silovém poli tělesa o hmotnosti $m_1 + m_2$ (viz obr. 49). Platí tedy i závěry vyplývající z řešení Keplerovy úlohy (tj. např. Keplerovy zákony), ale je nutné vše přeformulovat pomocí nových proměnných, pomocí nových hmotností μ a $m_1 + m_2$.



Obr. 49

Skutečnost, že máme dvě tělesa o hmotnostech μ a m_1+m_2, vyplývá z lagrangiánu zapsaného ve tvaru (127), do jehož druhého členu můžeme též dosadit ze vztahu (128). Dostaneme tak

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{G\mu(m_1+m_2)}{r}. \qquad (129)$$