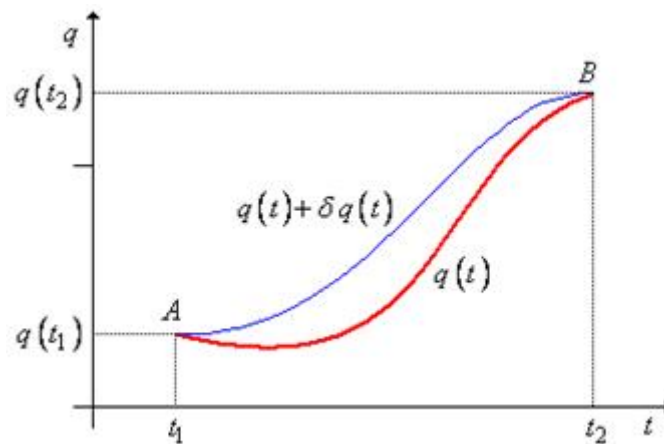


## Hamiltonův variační princip

Pro další výklad je nezbytné pochopit pojmy variace funkce  $\delta q(t)$  a variace funkcionálu  $\delta S$ . Tyto pojmy vysvětlíme na příkladu, v němž budeme uvažovat [pohyb](#) jedné [částice](#) po přímce. Závislost zobecněné [souřadnice](#)  $q$  na čase  $t$  je zobrazena na obr. 52. Je to jedna z mnoha závislostí, které mohou popisovat daný pohyb. Funkce  $q(t)$  je hladká funkce, která vstupuje jako parametr [lagrangiánu](#) do vztahu pro [akci](#)  $S$  (vztah (131)). Hodnota funkce  $q(t)$  v časech  $t_1$  a  $t_2$  (tj. poloha bodů  $A$  a  $B$ ) je daná - jsou to počáteční podmínky řešené úlohy.



Obr. 52

Nyní sestojíme funkci  $q(t) + \delta q(t)$  tak, že v každém časovém okamžiku v intervalu  $(t_1; t_2)$  přičteme k funkční hodnotě funkce  $q(t)$  hodnotu  $\delta q(t)$ . Vzhledem k tomu, že hodnoty funkce  $q(t)$  v časech  $t_1$  a  $t_2$  jsou dány, platí

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (132)$$

Vytvoříme tedy [trajektorii](#), která se od té původní „o trošku“ liší, a budeme hledat tu správnou (v přírodě realizovanou) trajektorii, která má minimální, maximální nebo „skoro stejnou“ akci.

Výše popsaným způsobem jsme provedli tzv. izochronní variaci.

**IZOCHRONNÍ VARIACE JE TAKOVÁ VARIACE, PŘI NÍŽ K FUNKČNÍ HODNOTĚ FUNKCE  $q$  V BODĚ  $t$  (TJ. K  $q(t)$ ) PŘIČTEME HODNOTU  $\delta q(t)$  A ZÍSKÁME FUNKČNÍ HODNOTU FUNKCE  $q(t) + \delta q(t)$  V ČASE  $t$ .**

To znamená, že křivku  $q(t)$  „přišpendlíme“ v bodech  $A$  a  $B$  (dle obr. 52) a tuto křivku „deformujeme“ jen tak, že jí natahujeme ve směru osy  $q$ . Nenatahujeme jí ve směru osy  $t$  - takové deformování by už nebyly izochronní variace.

Funkci  $q(t)$  přiřadíme akci  $S[q(t)]$  a funkci  $q(t) + \delta q(t)$  akci  $S[q(t) + \delta q(t)]$  a můžeme definovat [variaci akce](#), která přísluší funkci  $q(t)$  a variaci funkce  $\delta q(t)$ :

$$\delta S = S[q(t) + \delta q(t)] - S[q(t)]. \quad (133)$$

Protože hledáme funkci  $q(t)$  tak, aby  $\delta S = 0$  pro každé  $\delta q(t)$ , musíme pro funkce blízké funkci  $q(t)$  získat podobné hodnoty akce  $S$ . To znamená, že  $\delta q(t)$  nebude tak velké, jak je ilustrováno na obr. 52. Většinou lze psát

$$\delta q(t) = \varepsilon \eta(t), \quad (134)$$

kde  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Potom ovšem  $\delta S$  je lineární diferenciál (tzv. Frechetův diferenciál).

$\delta q(t)$  je tedy infinitezimálně malé.

Popisuje-li funkce  $q(t)$  trajektorii pohybu dané soustavy a mění-li se akce  $S$  při přechodu od funkce  $q(t)$  k funkci  $q(t) + \delta q(t)$ , pak  $q(t)$  popisuje trajektorii, která je sice možná, ale není to skutečná trajektorie, po níž se daný systém skutečně pohybuje.

Příroda prostě takové trajektorie, u kterých se při jejich malé změně mění  $S$ , nemá ráda.

Nutná podmínka pro splnění vztahu (130) je skutečnost, že funkce  $q(t)$  musí řešit [Eulerovy - Lagrangeovy rovnice](#). Tyto rovnice jsou obecné diferenciální rovnice druhého řádu. Speciální volbou funkce přecházejí na [Lagrangeovy rovnice druhého druhu](#) (47). Proto nyní dokážeme, že z podmínky (130) plyne existence Lagrangeových rovnic druhého druhu.

Vyjdeme ze vztahu (133), do kterého dosadíme z definičního vztahu akce  $S$  (131). Důkaz provedeme rovnou pro  $j$  [zobecněných souřadnic](#) ( $j = 1, 2, \dots, n$ , kde  $n$  je [počet stupňů volnosti](#)). Dostaneme tak

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \left( S[q^j(t) + \delta q^j(t)] - S[q^j(t)] \right) = \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left( L(q^j(t) + \delta q^j(t), \dot{q}^j(t) + \delta \dot{q}^j(t), t) - L(q^j(t), \dot{q}^j(t), t) \right) dt.$$

Důležité je, že symbolem  $\dot{q}^j(t)$  (resp.  $\delta \dot{q}^j(t)$ ) rozumíme časovou derivaci zobecněné souřadnice (resp. variace funkce), tj.  $\dot{q}^j(t) = \frac{dq^j(t)}{dt}$  (resp.  $\delta \dot{q}^j(t) = \frac{d(\delta q^j(t))}{dt}$ ).

Nyní provedeme Taylorův rozvoj lagrangiánu, který je závislý na variaci funkce  $\delta q(t)$ . Z důvodu vyšší přehlednosti již nebudeme vypisovat argumenty lagrangiánu  $L$ . Získáme tedy

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left( L + \frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j(t) + O\left( (\delta q^j(t))^2 \right) - L \right) dt,$$

kde  $O\left( (\delta q^j(t))^2 \right)$  je chyba, která vzniká při zanedbání členů obsahujících vyšší mocninu variace funkce  $\delta q(t)$ . Vzhledem k tomu, že variace funkce je definovaná vztahem (134), je chyba vzniká použitím Taylorova rozvoje malá. Dostáváme tedy

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j(t) \right) dt. \quad (135)$$

Vzhledem k tomu, že jsme provedli pouze izochronní variace, není v právě provedeném Taylorově rozvoji výraz  $\frac{\partial L}{\partial t} \delta t$ , neboť  $\delta t = 0$ .

Je dobré si uvědomit, že derivace podle času popisují změny v čase (tj. podél osy  $t$  na obr. 52), zatímco variace  $\delta q(t)$  popisují změny funkce  $q(t)$  (tj. změny podél osy  $q$ ).

Z izochronní variace funkce  $q(t)$  také vyplývá platnost identity

$$\delta \dot{q}^j(t) = \delta \frac{dq^j}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q^j. \quad (136)$$

Vztah (136) říká, že časové a prostorové variace jsou při izochronní variaci na sobě nezávislé (změny provedené v čase a změny provedené v prostorové souřadnici jsou tedy libovolné).

Dosadíme-li identitu (136) do vztahu (135) dostaneme výraz

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{d}{dt} (\delta q^j) \right) dt, \quad (137)$$

ve kterém je člen  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{d}{dt}(\delta q^j)$ . Ten můžeme upravit, pokud rozepíšeme časovou derivaci součinu  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j$ . Platí  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{d}{dt}(\delta q^j)$ , odkud

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{d}{dt}(\delta q^j) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q^j. \quad (138)$$

Nyní dosadíme vyjádření (138) do vztahu (137) a integrál součtu dále rozepíšeme na součet dvou integrálů. Dostaneme tak

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q^j(t) dt. \quad (139)$$

První člen výrazu (139) lze psát ve tvaru  $\sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j(t) \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j(t_2)} \delta q^j(t_2) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j(t_1)} \delta q^j(t_1)$ .

Vzhledem k platnosti podmínky (132) je tento člen nulový. Proto můžeme výraz (139) přepsat ve tvaru

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q^j(t) dt \quad (140)$$

Výraz (140) má být nulový, protože požadujeme splnění podmínky (130). Ta má ale platit pro všechny variace funkce  $\delta q^j(t)$  (pro  $j = 1, 2, \dots, n$ ), což znamená, že musí platit

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) = 0, \quad (141)$$

což je zápis Lagrangeových rovnic druhého druhu.

Dokázali jsme tedy, že z podmínky (130) vyplývají Lagrangeovy rovnice druhého druhu (viz vztah (141)). Můžeme tedy říci, že platnost rovnic (141) je nutnou podmínkou pro to, aby platil vztah (130). Vzhledem k tomu, že Lagrangeovy rovnice druhého druhu jsou ekvivalentním popisem [mechaniky](#) jako [Newtonovy](#) rovnice (Newtonovy rovnice jsou speciálním případem Lagrangeových rovnic), lze i Newtonovy rovnice odvodit z [Hamiltonova formalismu](#) a z podmínky (130).

Hamiltonův formalismus vzbudil v době jeho zavedení i později řadu i teologických sporů. Zdálo se zvláštní, že někdo zná počáteční bod pohybu i koncový bod pohybu a na základě toho vybírá trajektorii, po níž se [hmotný bod](#) pohybuje. Ve skutečnosti se jedná ovšem jen o další efektivní popis reality (mechaniky, elektřiny a magnetismu, částí [obecné teorie relativity](#), ...).

Skutečnost, že je dán počáteční a koncový bod pohybu, vyplývá z podmínky (132) na variaci funkce  $\delta q(t)$ .

Právě popsany princip lze zobecnit i např. na pohyb [tekutiny](#), na děje v [elektromagnetickém poli](#) a do dalších oborů fyziky. Obecně lze tento princip zobecnit i na nekonečný počet stupňů volnosti - tj. na spojitě kontinuum. Hamiltonův princip lze tedy zobecnit i pro teorie [pole](#).

Základní idea zobecnění variačního principu na nekonečně mnoho stupňů volnosti spočívá v přechodu od diskrétního rozložení zobecněných souřadnic  $q^j(t)$ , kde  $j \in \mathbb{N}$ , ke spojitému rozložení  $q^x(t)$ , kde  $x \in \mathbb{R}$ . Zobecněné souřadnice ve spojitém prostředí zapisujeme většinou ve tvaru  $q(t, x)$ , který lze chápat jako spojitou limitu  $q^j(t)$ , a který lze považovat za zápis funkce dvou proměnných  $t$  a  $x$ . Analogicky můžeme pokračovat se souřadnicemi  $y$  a  $z$  a získat tak popis [fyzikálního pole](#) pomocí

veličiny  $\Phi(t, x, y, z)$ . V závislosti na tvaru zápisu této fyzikální veličiny lze odlišit různé typy polí:

1.  $\Phi(t, x, y, z) = \Phi(x^\mu)$  - popisuje skalární pole;
2.  $\Phi(t, x, y, z) = A_\nu(x^\mu)$  - popisuje vektorové pole v rámci elektromagnetického pole;
3.  $\Phi(t, x, y, z) = g_{\alpha\beta}(x^\mu)$  - popisuje tenzorové pole v rámci obecné teorie relativity.

Pro každý z těchto případů platí podmínka (130).

V roce 1890 našel německý matematik a fyzik Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821 - 1894) akci  $S$ , pro kterou z podmínky (130), vycházejí Maxwellovy rovnice popisující elektromagnetické pole.

Existují i speciální akce, na základě kterých dostaneme popis geodetik v rámci obecné teorie relativity.