Úloha o brachistochroně

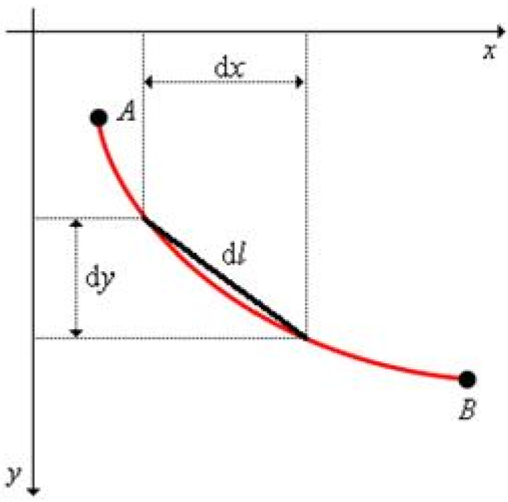
Úloha o brachistochroně sehrála v historii fyziky důležitou úlohu. Nejen, že stála u zrodu diferenciálního počtu a integrálního počtu, ale stala se také motivační úlohou pro formulaci Hamiltonova formalismu a Hamiltonova variačního prinicpu.

Zadání této úlohy je následující: Dva body *A* a *B*, které se nacházejí v různých polohách v gravitačním poli, ovšem ne na stejné svislé přímce (viz obr. 53), se mají spojit takovou křivkou, aby pohyb hmotného bodu z bodu *A* do *B* trval minimální čas.

Při řešení je nutné si uvědomit, že přírůstek času, přispívající k celkovému času *t*, po který se hmotný bod po hledané křivce pohybuje, je $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}l}{v}$, kde $\mathrm{d}l$ je přírůstek dráhy, kterou hmotný bod urazí. Pro celkový čas *t* tedy platí $t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}l}{v}$. Přírůstek dráhy $\mathrm{d}l$ je možné vyjádřit na základě obr. 53 ve tvaru $\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$ (na obr. 53 jsou vzdálenosti kvůli názornosti přehnaně velké). Pro velikost rychlosti v závislosti na souřadnici *y* ze zákona zachování mechanické energie vyplývá vztah $v(y) = \sqrt{2gy}$. Pro čas *t* tedy dostáváme

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}\,\mathrm{d}x\,. \qquad (147)$$

A tento čas má být podle zadání úlohy minimální. To ovšem znamená najít extrém funkce *t* (definované vztahem (147)) v závislosti na průběhu funkce $y(x)$.



Obr. 53

Řešení úlohy lze nalézt pomocí Eulerových - Lagrangeových rovnic; pro účely této úlohy bude vhodný konkrétně tvar (146). Pro funkci *F* přitom platí: $F(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$. Podle rovnice (146) tedy můžeme psát $\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} - y' \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = K$ a tuto rovnici dále postupně upravovat.

Levou stranu rovnice rozšíříme a získáme rovnici $\sqrt{\frac{\left(1 + y'^2\right)^2}{y\left(1 + y'^2\right)}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y\left(1 + y'^2\right)}} = K$, v níž částečně odmocníme levou stranu. V získaném tvaru rovnice $\frac{1+y'^2}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}}=K$ převedeme levou stranu rovnice na společného jmenovatele $\frac{1}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}}=K$ a zapíšeme v přehlednějším tvaru $y\left(1+y'^2\right)=C_1$, kde $C_1=\frac{1}{K^2}=konst.$

Důležité je si uvědomit, že hledáme vyjádření funkce y - tj. křivku, po níž se hmotný bod pohybuje.

Nyní zavedeme substituci ve tvaru

$$y'=\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} \tag{148}$$

a můžeme pokračovat v dalších úpravách.

Do posledního tvaru rovnice dosadíme substituční vztah (148) a získáme $y\left(1+\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}\right)=C_1$. Nyní rozepíšeme funkci kotangens podle její definice: $y\left(1+\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right)=C_1$. Dále převedeme na společného jmenovatele a s využitím známé goniometrické identity získáme rovnici $y\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}=C_1$, kterou můžeme psát ve tvaru $y=C_1\sin^2\frac{\varphi}{2}$.

Použitím goniometrického vzorce získáme rovnici

$$y=C_1\frac{1-\cos\varphi}{2}. \tag{149}$$

Nyní si připravíme několik dílčích výpočtů, které nám umožní najít řešení snadněji. Jednak na základě substituce (148) můžeme psát

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}}\,\mathrm{d}y \tag{150}$$

a dále diferencováním rovnice (149) dostaneme

$$\mathrm{d}y=C_1\frac{\sin\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi. \tag{151}$$

Dosazením vyjádření (151) do vztahu (150) postupně získáme $\mathrm{d}x=\frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}}.C_1\frac{\sin\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi=C_1\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}.\cos\frac{\varphi}{2}}{2}\mathrm{d}\varphi=C_1\sin^2\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi$, takže dostáváme vztah $\mathrm{d}x=C_1\frac{1-\cos\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi$, jehož řešení můžeme psát ve tvaru $x=\frac{C_1}{2}\int(1-\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. Řešení tedy můžeme psát ve tvaru

$$x=C(\varphi-\sin\varphi)+x_0, \tag{152}$$

kde $C=\frac{C_1}{2}=\frac{1}{2K^2}=konst.$

Ze vztahu (151) můžeme vyjádřit $y = C\int \sin\varphi \, d\varphi$ a dostaneme

$$y = -C\cos\varphi + y_0 . \tag{153}$$

Konstanty x_0 a y_0 vystupující ve vztazích (152) a (153) určíme na základě počátečních podmínek úlohy. Má-li bod *A*, který leží na cykloidě řešící zadanou úlohu, souřadnice $[x_A; y_A]$ (viz obr. 54), můžeme vztahy (152) a (153) psát ve tvaru $x_A = C(0 - \sin 0) + x_0$ a zároveň $y_A = -C\cos 0 + y_0$. Dosadili jsme také $\varphi = 0$, protože cykloida v bodě *A* začíná. Po úpravě dostáváme $x_0 = x_A$ a $y_0 = C + y_A$. Vztahy (152) a (153) můžeme tedy psát ve tvaru

$$x = C(\varphi - \sin\varphi) + x_A \quad \text{a} \quad y = C(1 - \cos\varphi) + y_A , \tag{154}$$

což jsou parametrické rovnice cykloidy. Trajektorie, po níž se musí pohybovat hmotný bod mezi dvěma zadanými body, aby se pohyboval nejkratší čas, leží tedy na cykloidě.

Pro vykreslení cykloidy mezi uvažovanými dvěma body *A* a *B* je nutné znát hodnotu konstanty *C* a maximální hodnotu φ_m úhlu φ, v závislosti na kterém se cykloida vykresluje. Tyto hodnoty lze získat pomocí koncového bodu cykloidy *B*, který má souřadnice $[x_B; y_B]$. Bodu *B* přitom odpovídá hodnota úhlu $\varphi = \varphi_m$, kterou dosadíme do rovnic (154). Vzhledem ke tvaru parametrických rovnic cykloidy (154) je zřejmé, že řešení nebude možné získat analyticky. Budeme muset použít numerické řešení rovnic. Nicméně před numerickým řešením se vyplatí provést několik úprav rovnic (154).

Do rovnic (154) tedy dosadíme souřadnice bodu *B* a vyloučíme z nich parametr *C*, čímž dostaneme jednu rovnici ve tvaru $(x_B - x_A)(1 - \cos\varphi_m) = (y_B - y_A)(\varphi_m - \sin\varphi_m)$. Dále rovnici upravíme do tvaru

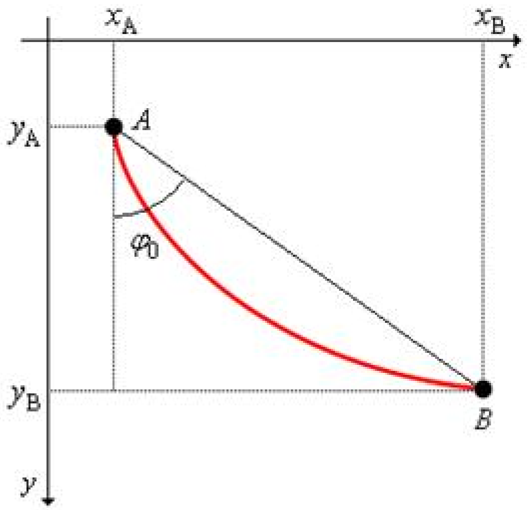
$$x_B - x_A - (y_B - y_A)\varphi_m = (x_B - x_A)\cos\varphi_m - (y_B - y_A)\sin\varphi_m . \tag{155}$$

Podle obr. 54 lze pro úhel φ_0 psát

$$\sin\varphi_0 = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \quad \text{a} \quad \cos\varphi_0 = \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \tag{156}$$

a proto vztah (155) přepíšeme v takovém tvaru, do kterého později snadno dosadíme vztahy (156):

$$x_B - x_A - (y_B - y_A)\varphi_m = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\left(\frac{(x_B - x_A)\cos\varphi_m}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} - \frac{(y_B - y_A)\sin\varphi_m}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}\right).$$



Obr. 54

Po dosazení ze vztahů (156) dostaneme rovnici $\frac{x_B - x_A - (y_B - y_A)\varphi_m}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} = \sin\varphi_0 \cos\varphi_m - \cos\varphi_0 \sin\varphi_m$, kterou můžeme s využitím goniometrických vztahů psát ve tvaru

$$\frac{x_B - x_A - (y_B - y_A)\varphi_m}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} = \sin(\varphi_m - \varphi_0). \qquad (157)$$

Získali jsme tedy rovnici, na základě níž je možné numericky určit hodnotu úhlu φ_m. Poté je možné určit hodnotu parametru *C* pomocí jednoho ze vztahů

$$C = \frac{x_B - x_A}{\varphi - \sin\varphi} = \frac{y_B - y_A}{1 - \cos\varphi}. \qquad (158)$$

Tím je cykloida, která hraje ve fyzice velmi důležitou úlohu, jednoznačně popsána.

S cykloidou se fyzikové setkávají často: popisuje rozpínání vesmíru, nizozemský matematik, fyzik a astronom Christian Huygens sestrojil cykloidální kyvadlo, jehož frekvence nezávisí na počáteční výchylce, ...
