Formulace a důkaz Hamiltonových kanonických rovnic

HAMILTONOVY KANONICKÉ ROVNICE JSOU ROVNICE VE TVARU

$$\frac{\mathrm{d}q^{\mathrm{j}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_{\mathrm{j}}} \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{j}}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q^{\mathrm{j}}} \tag{174}$$

PRO $j=1,2,\dots,n$, KDE n JE POČET STUPŇŮ VOLNOSTI DANÉHO SYSTÉMU.

Na základě vhodně zavedeného hamiltoniánu (173) jsou Hamiltonovy kanonické rovnice jednoduché a symetrické. Tyto rovnice, které Ir sir Rowan Hamilton odvodil v roce 1834, jsou soustavou 2*n* obyčejných diferenciálních rovnic s neznámými $q^{\mathrm{j}}(t)$ a $p_{\mathrm{j}}(t)$ pro $j=1,2,\dots,n$. Uvedený tvar rovnic vyplývá ze symplektické struktury fázového prostoru, která zaručuje jednoznačný popis systému, správná znaménka v rovnicích, …

Přesto, že se v zápise Hamiltonvých rovnic objevují parciální derivace, jsou to rovnice obyčejné, tj. po úpravách budou obsahovat jen totální („normální“) derivace. Symbol $\frac{\partial H}{\partial p_{\mathrm{j}}}$ resp. $\frac{\partial H}{\partial q^{\mathrm{j}}}$ dává jen návod na sestavení pravé strany příslušné Hamiltonovy rovnice.

Nyní rovnice dokážeme; důkaz přitom provedeme dvakrát - jednou podle definice hamiltoniánu a podruhé pomocí Hamiltonova variačního principu.

Začneme důkazem první Hamiltonovy rovnice, který provedeme na základě definice hamiltoniánu (173). Pravou stranu první Hamiltonovy rovnice tedy rozepíšeme podle definice hamiltoniánu (173) s vyznačením proměnných, na nichž závisí zobecněná rychlost a lagrangián: $\frac{\partial H}{\partial p_{\mathrm{j}}}=\frac{\partial}{\partial p_{\mathrm{j}}}\left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} p_{\mathrm{i}}\dot{q}^{\mathrm{i}}\left(q^{\mathrm{k}}(t),p_{\mathrm{k}}(t),t\right)-L\left(q^{\mathrm{j}}(t),\dot{q}^{\mathrm{i}}\left(q^{\mathrm{k}}(t),p_{\mathrm{k}}(t),t\right),t\right)\right)$. Nyní provedeme naznačenou derivaci a argumenty funkcí kvůli větší přehlednosti již vypisovat nebudeme: $\frac{\partial H}{\partial p_{\mathrm{j}}}=\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\left(\frac{\partial p_{\mathrm{i}}}{\partial p_{\mathrm{j}}}\dot{q}^{\mathrm{i}}+p_{\mathrm{i}}\frac{\partial \dot{q}^{\mathrm{i}}}{\partial p_{\mathrm{j}}}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mathrm{i}}}\frac{\partial \dot{q}^{\mathrm{i}}}{\partial p_{\mathrm{j}}}\right)$.

Derivace lagrangiánu podle p_{j} je rovna součinu derivace lagrangiánu podle $\dot{q}^{\mathrm{i}}$ a derivace $\dot{q}^{\mathrm{i}}$ podle p_{j}, protože p_{j} je „schovaná“ právě v $\dot{q}^{\mathrm{i}}$ ($\dot{q}^{\mathrm{i}}$ závisí na p_{j}). Proto lagrangián derivujeme jako složenou funkci.

S využitím definice kanonické hybnosti (172) můžeme pokračovat v úpravách: $\frac{\partial H}{\partial p_{\mathrm{j}}}=\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\left(\frac{\partial p_{\mathrm{i}}}{\partial p_{\mathrm{j}}}\dot{q}^{\mathrm{i}}+p_{\mathrm{i}}\frac{\partial \dot{q}^{\mathrm{i}}}{\partial p_{\mathrm{j}}}-p_{\mathrm{i}}\frac{\partial \dot{q}^{\mathrm{i}}}{\partial p_{\mathrm{j}}}\right)=\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\delta_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}\dot{q}^{\mathrm{i}}=\dot{q}^{\mathrm{j}}=\frac{\mathrm{d}q^{\mathrm{j}}}{\mathrm{d}t}$ a tím je platnost první Hamiltonovy kanonické rovnice dokázána.

Analogicky můžeme pokračovat v důkazu druhé Hamiltonovy rovnice: $\frac{\partial H}{\partial q^{\mathrm{j}}}=\frac{\partial}{\partial q^{\mathrm{j}}}\left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} p_{\mathrm{i}}\dot{q}^{\mathrm{i}}\left(q^{\mathrm{k}}(t),p_{\mathrm{k}}(t),t\right)-L\left(q^{\mathrm{j}}(t),\dot{q}^{\mathrm{i}}\left(q^{\mathrm{k}}(t),p_{\mathrm{k}}(t),t\right),t\right)\right)$. Po provedení derivace dostaneme rovnici, v níž opět už nebudeme vypisovat argumenty funkcí: $\frac{\partial H}{\partial q^{\mathrm{j}}}=\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} p_{\mathrm{i}}\frac{\partial \dot{q}^{\mathrm{i}}}{\partial q^{\mathrm{j}}}-\frac{\partial L}{\partial q^{\mathrm{j}}}-\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mathrm{i}}}\frac{\partial \dot{q}^{\mathrm{i}}}{\partial q^{\mathrm{j}}}$. Opět s využitím vztahu (172) můžeme postupně psát $\frac{\partial H}{\partial q^{\mathrm{j}}}=\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} p_{\mathrm{i}}\frac{\partial \dot{q}^{\mathrm{i}}}{\partial q^{\mathrm{j}}}-\frac{\partial L}{\partial q^{\mathrm{j}}}-\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} p_{\mathrm{i}}\frac{\partial \dot{q}^{\mathrm{i}}}{\partial q^{\mathrm{j}}}=-\frac{\partial L}{\partial q^{\mathrm{j}}}$. Vztah

$$\frac{\partial H}{\partial q^{\mathrm{j}}}=-\frac{\partial L}{\partial q^{\mathrm{j}}} \tag{175}$$

je sice zajímavý, ale zatím to není ten vztah, jehož platnost jsme měli dokázat. Navíc zatím jsme využívali pouze matematické úpravy výrazů bez fyzikálního náhledu. Ten využijeme nyní: pravou stranu rovnosti (175) vyjádříme pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu (47). Dostaneme tak

$\frac{\partial H}{\partial q^j} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) = -\frac{dp_j}{dt}$ (druhá úprava byla provedena na základě definice kanonické hybnosti (172)). Tím jsme dokázali i druhou Hamiltonovu kanonickou rovnici.

Ve druhém kroku dokážeme Hamiltonovy kanonické rovnice pomocí Hamiltonova variačního principu. Důkaz nebudeme provádět v Lagrangeově formalismu, ale v Hamiltonově formalismu. Definiční vztah hamiltoniánu (173) upravíme na tvar

$$L = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}^j - H \,. \tag{176}$$

Vyjdeme z podmínky (130). V ní vystupuje akce S, kterou vyjádříme pomocí definice (131) s přihlédnutím k lagrangiánu ve tvaru (176). Dostaneme tedy $0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}^j - H \right) dt$.

Výraz $\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}^j - H \right) dt$ přitom můžeme interpretovat tak, že se zajímáme o změnu integrálu při změně funkcí, které integrujeme. Proto můžeme dále pokračovat v úpravách. Začneme diferencováním a dostaneme

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\delta p_j \dot{q}^j + p_j \delta \dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial q^j} \delta q^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t \right) dt \,. \tag{177}$$

Člen $\frac{\partial H}{\partial t} \delta t$ ve výrazu (177) je nulový, protože jsme se omezili na izochronní variace. Dále upravíme výraz $\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} p_j \delta \dot{q}^j dt$, který je též částí výrazu (177). S využitím identity (136) a následným použitím metody per-partes můžeme psát: $\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} p_j \delta \dot{q}^j dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{d}{dt}\left(\delta q^j\right) dt = \left[p_j \delta q^j(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \frac{dp_j}{dt} \delta q^j dt$.

Vzhledem k tomu, že uvažujeme izochronní variace s pevnými konci, platí podmínka (132) a tedy $\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} p_j \delta \dot{q}^j dt = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \frac{dp_j}{dt} \delta q^j dt$. Nyní dosadíme do výrazu (177) a dostaneme $0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\delta p_j \dot{q}^j - \frac{dp_j}{dt} \delta q^j - \frac{\partial H}{\partial q^j} \delta q^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) dt$. Po úpravě tedy máme

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j + \left(-\frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \right) \delta q^j \right) dt \,. \tag{178}$$

Všechny variace δq^j a δp_j pro $j = 1, 2, \ldots, n$ ze vztahu (178) jsou dovolené a navzájem nezávislé. To ovšem znamená, že vztah (178) je splněn pouze tehdy, když $\dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0$ a $-\frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q^j} = 0$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$. To je ovšem vyjádření Hamiltonových kanonických rovnic (174), jejichž platnost jsme chtěli dokázat.

Na základě podmínky (130) jsme tedy odvodili další pohybové rovnice. Pomocí Hamiltonova variačního principu jsme odvodili z podmínky (130) Lagrangeovy rovnice druhého druhu, nyní ze stejné podmínky Hamiltonovy kanonické rovnice. Podmínka (130) má tedy hlubší význam.