Harmonický oscilátor

Harmonický oscilátor je velmi důležitý pojem nejen pro teoretickou fyziku a mechaniku, ale i pro další obory fyziky. Pomocí harmonického kmitání lze totiž modelovat řadu fyzikálních jevů, protože pohyb harmonického oscilátoru je jednoduchý, je popsán relativně jednoduchými rovnicemi a přitom jej lze použít k velmi přesnému modelování složitějších fyzikálních jevů a dějů (přenos tepla, vysvětlení měrné tepelné kapacity látek, odvození vlnové rovnice, kmity atomů resp. částic popisovaných v rámci kvantové fyziky, ...).

Chceme-li napsat Hamiltonovy kanonické rovnice popisující harmonický oscilátor, je nutné nejdříve napsat jeho lagrangián. Ten má tvar $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ a z něj vyplývající kanonická hybnost je dána vztahem $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$. Pro výpočet hamiltoniánu je nezbytné vyjádřit všechny zobecněné rychlosti pomocí kanonických hybností, proto si připravíme vyjádření $\dot{x} = \frac{p}{m}$. Hamiltonián můžeme psát na základě jeho definice (173) ve tvaru $H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\frac{p^2}{m^2} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$. Výraz $\frac{p^2}{2m}$ má jednotku $\left[\frac{p^2}{2m}\right] = \frac{\mathrm{kg}^2.\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{kg}} = \mathrm{kg.m}^2.\mathrm{s}^{-2} = \mathrm{N.m} = \mathrm{J}$ a tedy platí alternativní vyjádření $T = \frac{p^2}{2m}$. Hamiltonián je tedy roven $H = T + V = E$ a vyjadřuje celkovou mechanickou energii systému.

Vztah $H = E$ neplatí obecně, ale pouze tehdy, nezávisí-li hamiltonián explicitně na čase. A tato podmínka je splněna ve většině vyšetřovaných případů.

Nyní můžeme napsat Hamiltonovy rovnice pro harmonický oscilátor tak, že dosadíme do vztahů (174). Dostaneme tedy $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$ a $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$. Máme tedy dvě lineární rovnice $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m}$ a $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -kx$. Zderivujeme-li první z nich podle času, dostaneme: $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ a dosadíme do ní z druhé Hamiltonovy rovnice. Získáme tedy rovnici $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{kx}{m}$ a po úpravě $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{kx}{m} = 0$, což je známá rovnice popisující pohyb harmonického oscilátoru. Její řešení lze psát ve tvaru $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, kde A je amplituda výchylky, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ je úhlová frekvence kmitání harmonického oscilátoru a φ_0 je počáteční fáze kmitání.