

Harmonický oscilátor

Harmonický oscilátor je velmi důležitý pojem nejen pro teoretickou fyziku a [mechaniku](#), ale i pro další obory fyziky. Pomocí [harmonického kmitání](#) lze totiž modelovat řadu fyzikálních jevů, protože [pohyb](#) harmonického oscilátoru je jednoduchý, je popsán relativně jednoduchými rovnicemi a přitom jej lze použít k velmi přesnému modelování složitějších fyzikálních jevů a dějů (přenos [tepla](#), vysvětlení [měrné tepelné kapacity](#) látek, odvození vlnové rovnice, kmity [atomů](#) resp. [částic](#) popisovaných v rámci [kvantové fyziky](#), ...).

Chceme-li napsat [Hamiltonovy kanonické rovnice](#) popisující harmonický oscilátor, je nutné nejdříve napsat jeho [lagrangián](#). Ten má tvar $L = \frac{1}{2}mv\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ a z něj vyplývající [kanonická hybnost](#) je dána vztahem $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = mv$. Pro výpočet [hamiltoniánu](#) je nezbytné vyjádřit všechny [zobecněné](#)

[rychlosti](#) pomocí kanonických hybností, proto si připravíme vyjádření $v = \frac{p}{m}$. Hamiltonián můžeme psát na základě jeho definice (173) ve tvaru

$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}mv\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\frac{p^2}{m^2} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$. Výraz $\frac{p^2}{2m}$ má [jednotku](#) $\left[\frac{p^2}{2m}\right] = \frac{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg}} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$ a tedy platí alternativní vyjádření $T = \frac{p^2}{2m}$. Hamiltonián je tedy roven $H = T + V = E$ a vyjadřuje celkovou [mechanickou energii](#) systému.

Vztah $H = E$ neplatí obecně, ale pouze tehdy, nezávisí-li hamiltonián explicitně na čase. A tato podmínka je splněna ve většině vyšetřovaných případů.

Nyní můžeme napsat [Hamiltonovy rovnice](#) pro harmonický oscilátor tak, že dosadíme do vztahů (174). Dostaneme tedy $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$ a $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$. Máme tedy dvě lineární rovnice $\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$ a

$\frac{dp}{dt} = -kx$. Zderivujeme-li první z nich podle času, dostaneme: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} \frac{dp}{dt}$ a dosadíme do ní z druhé

Hamiltonovy rovnice. Získáme tedy rovnici $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{m}$ a po úpravě $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0$, což je známá rovnice popisující pohyb harmonického oscilátoru. Její řešení lze psát ve tvaru $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, kde A je

[amplituda výchylky](#), $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ je úhlová [frekvence kmitání](#) harmonického oscilátoru a φ_0 je [počáteční fáze](#) kmitání.