Popis pohybu částice v cylindrických souřadnicích

Lagrangeova funkce popisující pohyb částice v kartézských souřadnicích je dána vztahem (179). Do cylindrických souřadnic jí přepíšeme pomocí následujících transformačních vztahů:

$x = R\cos\Phi$;

$y = R\sin\Phi$;

$z = z$.

Tyto souřadnice závisí na čase. Vzhledem k tomu, že v dalším výpočtu budeme potřebovat jejich časové derivace, určíme je:

$\dot{x} = \dot{R}\cos\Phi - R\dot{\Phi}\sin\Phi$;

$\dot{y} = \dot{R}\sin\Phi + R\dot{\Phi}\cos\Phi$;

$\dot{z} = \dot{z}$

Nyní dosadíme do lagrangiánu (179), zjednodušíme a dostaneme

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\Phi}^2 + \dot{z}^2\right) - V\left(R, \Phi, z\right) . \qquad (183)$$

Kanonické hybnosti odpovídající souřadnicím R, Φ a z získáme derivací Lagrangeovy funkce podle zobecněné rychlosti příslušející dané souřadnici. Takže postupně dostáváme

$$p_{\mathrm{R}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = m\dot{R}, \; p_{\Phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = mR^2\dot{\Phi} \text{ a } p_{z} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} . \qquad (184)$$

Z předpisu pro kanonické hybností můžeme vyjádřit příslušné zobecněné rychlosti a získáme

$$\dot{R} = \frac{p_{\mathrm{R}}}{m}, \; \dot{\Phi} = \frac{p_{\Phi}}{mR^2} \text{ a } \dot{z} = \frac{p_{z}}{m} . \qquad (185)$$

Hamiltonovu funkci nyní můžeme psát ve tvaru $H = p_{\mathrm{R}}\dot{R} + p_{\Phi}\dot{\Phi} + p_{z}\dot{z} - L$. Po dosazení ze vztahů (183), (184) a (185) pro Hamiltonovu funkci pohybující se částice postupně dostaneme $H = \frac{p_{\mathrm{R}}^2}{m} + \frac{p_{\Phi}^2}{m} + \frac{p_{z}^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\Phi}^2 + \dot{z}^2\right) + V\left(R, \Phi, z\right) = \frac{p_{\mathrm{R}}^2}{m} + \frac{p_{\Phi}^2}{m} + \frac{p_{z}^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_{\mathrm{R}}^2}{m^2} + \frac{R^2 p_{\Phi}^2}{m^2 R^4} + \frac{p_{z}^2}{m}\right) + V\left(R, \Phi, z\right)$. Takže hamiltonián je roven

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_{\mathrm{R}}^2 + \frac{p_{\Phi}^2}{R^2} + p_{z}^2\right) + V\left(R, \Phi, z\right) \qquad (186)$$

a je nezávislý na čase. Proto tedy platí $H = E$.

Další výpočet pomocí Hamiltonových rovnic není možný, protože neznáme konkrétní průběh potenciální energie $V\left(R, \Phi, z\right)$.
