Popis pohybu částice v cylindrických souřadnicích

Lagrangeova funkce popisující pohyb částice v kartézských souřadnicích je dána vztahem (179). Do cylindrických souřadnic jí přepíšeme pomocí následujících transformačních vztahů:

$x = R\cos\Phi$;

$y = R\sin\Phi$;

$z = z$.

Tyto souřadnice závisí na čase. Vzhledem k tomu, že v dalším výpočtu budeme potřebovat jejich časové derivace, určíme je:

$\dot{x} = \dot{R}\cos\Phi - R\dot{\Phi}\sin\Phi$;

$\dot{y} = \dot{R}\sin\Phi + R\dot{\Phi}\cos\Phi$;

$\dot{z} = \dot{z}$

Nyní dosadíme do lagrangiánu (179), zjednodušíme a dostaneme

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\Phi}^2 + \dot{z}^2\right) - V(R,\Phi,z)\,. \tag{183}$$

Kanonické hybnosti odpovídající souřadnicím R, Φ a z získáme derivací Lagrangeovy funkce podle zobecněné rychlosti příslušející dané souřadnici. Takže postupně dostáváme

$$p_R = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = m\dot{R}\,,\ p_\Phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = mR^2\dot{\Phi} \text{ a } p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}\,. \tag{184}$$

Z předpisu pro kanonické hybností můžeme vyjádřit příslušné zobecněné rychlosti a získáme

$$\dot{R} = \frac{p_R}{m}\,,\ \dot{\Phi} = \frac{p_\Phi}{mR^2} \text{ a } \dot{z} = \frac{p_z}{m}\,. \tag{185}$$

Hamiltonovu funkci nyní můžeme psát ve tvaru $H = p_R\dot{R} + p_\Phi\dot{\Phi} + p_z\dot{z} - L$. Po dosazení ze vztahů (183), (184) a (185) pro Hamiltonovu funkci pohybující se částice postupně dostaneme $H = \frac{p_R^2}{m} + \frac{p_\Phi^2}{m} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\Phi}^2 + \dot{z}^2\right) + V(R,\Phi,z) = \frac{p_R^2}{m} + \frac{p_\Phi^2}{m} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_R^2}{m^2} + \frac{R^2p_\Phi^2}{m^2R^4} + \frac{p_z^2}{m}\right) + V(R,\Phi,z)$. Takže hamiltonián je roven

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_R^2 + \frac{p_\Phi^2}{R^2} + p_z^2\right) + V(R,\Phi,z) \tag{186}$$

a je nezávislý na čase. Proto tedy platí $H = E$.

Další výpočet pomocí Hamiltonových rovnic není možný, protože neznáme konkrétní průběh potenciální energie $V(R,\Phi,z)$.

© Encyklopedie Fyziky (http://fyzika.jreichl.com); Jaroslav Reichl, Martin Všetička

Licence http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/ zakazuje úpravy a komerční distribuci.