

## Popis pohybu částice ve sférických souřadnicích

[Lagrangeova funkce](#) popisující [pohyb částice](#) v kartézských [souřadnicích](#) je zapsána ve tvaru (179). Do sférických souřadnic jí přepíšeme pomocí následujících transformačních vztahů:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi;$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi;$$

$$z = r \cos \vartheta.$$

Tyto souřadnice závisí na čase. Proto nejdříve určíme jejich první derivace podle času:

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \vartheta \cos \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi;$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \vartheta \sin \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi;$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta$$

Nyní dosadíme do [lagrangiánu](#) (179), zjednodušíme a dostaneme

$$L = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) - V(r, \vartheta, \varphi). \quad (187)$$

[Kanonické hybnosti](#) odpovídající souřadnicím  $r$ ,  $\vartheta$  a  $\varphi$  získáme derivací lagrangiánu podle [zobecněné rychlosti](#) příslušející dané souřadnici. Takže postupně dostáváme

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2 \dot{\vartheta} \quad \text{a} \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta. \quad (188)$$

Z předpisu pro kanonické hybnosti můžeme nyní vyjádřit příslušné zobecněné rychlosti ve tvarech

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2} \quad \text{a} \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (189)$$

[Hamiltonovu funkci](#) nyní můžeme psát ve tvaru  $H = p_r \dot{r} + p_\vartheta \dot{\vartheta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L$ . Po dosazení ze vztahů (187), (188) a (189) můžeme pro Hamiltonovu funkci uvažované pohybující se částice postupně psát

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\vartheta^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m} - \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) + V(r, \vartheta, \varphi) = \\ &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\vartheta^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m} - \frac{1}{2} m \left( \frac{p_r^2}{m^2} + \frac{r^2 p_\vartheta^2}{m^2 r^4} + \frac{r^2 \sin^2 \vartheta p_\varphi^2}{m^2 r^4 \sin^4 \vartheta} \right) + V(r, \vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

Takže [hamiltonián](#) je roven

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r, \vartheta, \varphi) \quad (190)$$

a je nezávislý na čase. Proto tedy platí  $H = E$ .

Další výpočet pomocí [Hamiltonových rovnic](#) není možný, protože neznáme konkrétní průběh [potenciální energie](#)  $V(r, \vartheta, \varphi)$ .

---

© **Encyklopedie Fyziky** (<http://fyzika.jreichl.com>); **Jaroslav Reichl, Martin Všetíčka**  
Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.