Popis pohybu částice ve sférických souřadnicích

Lagrangeova funkce popisující pohyb částice v kartézských souřadnicích je zapsána ve tvaru (179). Do sférických souřadnic jí přepíšeme pomocí následujících transformačních vztahů:

$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$;

$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$;

$z = r\cos\vartheta$.

Tyto souřadnice závisí na čase. Proto nejdříve určíme jejich první derivace podle času:

$\dot{x} = \dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi$;

$\dot{y} = \dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\varphi$;

$\dot{z} = \dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta$

Nyní dosadíme do lagrangiánu (179), zjednodušíme a dostaneme

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\right) - V(r, \vartheta, \varphi). \tag{187}$$

Kanonické hybnosti odpovídající souřadnicím r, ϑ a φ získáme derivací lagrangiánu podle zobecněné rychlosti příslušející dané souřadnici. Takže postupně dostáváme

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta} \text{ a } p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta. \tag{188}$$

Z předpisu pro kanonické hybností můžeme nyní vyjádřit příslušné zobecněné rychlosti ve tvarech

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2} \text{ a } \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\vartheta}. \tag{189}$$

Hamiltonovu funkci nyní můžeme psát ve tvaru $H = p_r\dot{r} + p_\vartheta\dot{\vartheta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L$. Po dosazení ze vztahů (187), (188) a (189) můžeme pro Hamiltonovu funkci uvažované pohybující se částice postupně psát

$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\vartheta^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m} - \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\right) + V(r, \vartheta, \varphi) =$

$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\vartheta^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{r^2 p_\vartheta^2}{m^2 r^4} + \frac{r^2\sin^2\vartheta\, p_\varphi^2}{m^2 r^4\sin^4\vartheta}\right) + V(r, \vartheta, \varphi)$. Takže hamiltonián je roven

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right) + V(r, \vartheta, \varphi) \tag{190}$$

a je nezávislý na čase. Proto tedy platí $H = E$.

Další výpočet pomocí Hamiltonových rovnic není možný, protože neznáme konkrétní průběh potenciální energie $V(r, \vartheta, \varphi)$.

© Encyklopedie Fyziky (http://fyzika.jreichl.com); Jaroslav Reichl, Martin Všetička
Licence http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/ zakazuje úpravy a komerční distribuci.