Nabitá částice v elektromagnetickém poli

Další ilustrací použití Hamiltonových rovnic je jejich aplikace na vyšetřování pohybu částice s nábojem *e*, která se pohybuje v elektromagnetickém poli charakterizovaném skalárním potenciálem φ a vektorovým potenciálem $\vec{A}$.

Lagrangeova funkce popisující pohyb nabité částice v elektromagnetickém poli (vzhledem ke vztahu (70), který definuje potenciální energii částice) má tvar

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - e\left(\varphi - \vec{v}.\vec{A}\right), \tag{191}$$

který je možné přepsat ve složkách vektorů $\vec{v}$ a $\vec{A}$ ve tvaru

$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - e\left(\varphi - \dot{x}A_x - \dot{y}A_y - \dot{z}A_z\right). \tag{192}$$

Kanonické hybnosti, které odpovídají souřadnicím *x*, *y* a *z*, získáme derivací Lagrangeovy funkce podle zobecněné rychlosti příslušející dané souřadnici. Takže postupně dostáváme

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_x\,,\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + eA_y \text{ a } p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + eA_z\,. \tag{193}$$

Z kanonických hybností můžeme vyjádřit příslušné zobecněné rychlosti a získáme

$$\dot{x} = \frac{p_x - eA_x}{m}\,,\ \dot{y} = \frac{p_y - eA_y}{m} \text{ a } \dot{z} = \frac{p_z - eA_z}{m}\,. \tag{194}$$

Hamiltonián můžeme v tomto případě psát ve tvaru $H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L$. Po dosazení ze vztahů (192), (193) a (194) postupně pro hamiltonián uvažované částice pohybující se v elektromagnetickém poli máme

$$H = m\dot{x}^2 + e\dot{x}A_x + m\dot{y}^2 + e\dot{y}A_y + m\dot{z}^2 + e\dot{z}A_z - \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + e\left(\varphi - \dot{x}A_x - \dot{y}A_y - \dot{z}A_z\right) =$$

$$= \frac{\left(p_x - eA_x\right)^2}{m} + \frac{\left(p_y - eA_y\right)^2}{m} + \frac{\left(p_z - eA_z\right)^2}{m} - \frac{1}{2} m\left(\frac{\left(p_x - eA_x\right)^2}{m^2} + \frac{\left(p_y - eA_y\right)^2}{m^2} + \frac{\left(p_z - eA_z\right)^2}{m^2}\right) + e\varphi =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\left(p_x - eA_x\right)^2 + \left(p_y - eA_y\right)^2 + \left(p_z - eA_z\right)^2\right) + e\varphi$$. Takže hamiltonián lze psát ve tvaru

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 + e\varphi \tag{195}$$

a i v tomto případě je nezávislý na čase, takže $H = E$.

© Encyklopedie Fyziky (http://fyzika.jreichl.com); Jaroslav Reichl, Martin Všetička
Licence http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/ zakazuje úpravy a komerční distribuci.