

## Definice a matematické vlastnosti

Francouzský matematik a fyzik Siméon Denis Poisson (1781 - 1840) zavedl v roce 1809 symboliku, která se používá dodnes. Říká se jí Poissonovy závorky.

**MĚJME DVĚ FUNKCE  $f(q^j, p_j, t)$  A  $g(q^j, p_j, t)$  DEFINOVANÉ VE FÁZOVÉM PROSTORU. PAK LZE VE FÁZOVÉM PROSTORU DEFINOVAT NOVOU FUNKCI STEJNÝCH PROMĚNNÝCH JAKO MAJÍ FUNKCE  $f$  A  $g$  PŘEDPISEM**

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q^j} \right), \quad (198)$$

**KDE  $q^j$  JSOU ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE,  $p_j$  JSOU KANONICKÉ HYBNOSTI (PRO  $j=1, 2, \dots, n$ ) A  $n$  JE POČET STUPŇŮ VOLNOSTI. FUNKCE  $\{f, g\}$  SE NAZÝVÁ POISSONOVA ZÁVORKA FUNKCÍ  $f$  A  $g$ .**

Poissonovy závorky je tedy označení pro operaci, která se provádí se dvěma funkcemi a jejímž výsledkem je opět funkce.

V literatuře se Poissonovy závorky občas značí symbolem  $[f, g]$ , případně se definují s opačným znaménkem.

Počítání s Poissonovými závorkami se řídí těmito pravidly:

1. Poissonovy závorky jsou antisymetrickou operací, tj. platí

$$\{f, g\} = -\{g, f\}; \quad (199)$$

2. Poissonovy závorky jsou lineární, tj. pro  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  platí

$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\}; \quad (200)$$

Tento vztah tedy ukazuje, že Poissonovy závorky jsou lineární v prvním argumentu. Z antisymetrie závorek vyplývá, že závorky jsou lineární i ve druhém argumentu.

3. Poissonovy závorky splňují tzv. **Jacobiho identitu**

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0; \quad (201)$$

4. Poissonovy závorky lze aplikovat i na součin funkcí

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}. \quad (202)$$

Tento vztah vyplývá ze vztahu pro derivaci součinu dvou funkcí (tzv. Leibnitzovo pravidlo). Vzhledem k tomu, že výsledkem Poissonových závorek je funkce, lze např. člen  $\{f, h\}$  psát i ve tvaru  $g\{f, h\}$ , protože násobení funkcí je komutativní.

Ze vztahů (199), (200) a (201) vyplývá, že Poissonovy závorky definované na fázovém prostoru vztahem (198) tvoří tzv. Lieovu grupu (jsou to bilineární operace na vektorovém prostoru).

V [kvantové mechanice](#) se Poissonovy závorky stávají operátory a obecně už komutativní nejsou.

---

© **Encyklopedie Fyziky** (<http://fyzika.jreichl.com>); **Jaroslav Reichl, Martin Všeticka**

Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.