## Definice a matematické vlastnosti

Francouzský matematik a fyzik Siméon Denis Poisson (1781 - 1840) zavedl v roce 1809 symboliku, která se používá dodnes. Říká se jí Poissonovy závorky.

**MĚJME DVĚ FUNKCE $f\left(q^{j}, p_{j}, t\right)$ A $g\left(q^{j}, p_{j}, t\right)$ DEFINOVANÉ VE FÁZOVÉM PROSTORU. PAK LZE VE FÁZOVÉM PROSTORU DEFINOVAT NOVOU FUNKCI STEJNÝCH PROMĚNNÝCH JAKO MAJÍ FUNKCE $f$ A $g$ PŘEDPISEM**

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q^{j}}\frac{\partial g}{\partial p_{j}} - \frac{\partial f}{\partial p_{j}}\frac{\partial g}{\partial q^{j}}\right), \qquad (198)$$

**KDE $q^{j}$ JSOU ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE, $p_{j}$ JSOU KANONICKÉ HYBNOSTI (PRO $j = 1, 2, \dots, n$) A $n$ JE POČET STUPŇŮ VOLNOSTI. FUNKCE $\{f, g\}$ SE NAZÝVÁ POISSONOVA ZÁVORKA FUNKCÍ $f$ A $g$.**

Poissonovy závorky je tedy označení pro operaci, která se provádí se dvěma funkcemi a jejímž výsledkem je opět funkce.

V literatuře se Poissonovy závorky občas značí symbolem $[f, g]$, případně se definují s opačným znaménkem.

Počítání s Poissonovými závorkami se řídí těmito pravidly:

1. Poissonovy závorky jsou antisymetrickou operací, tj. platí

$$\{f, g\} = -\{g, f\}\ ; \qquad (199)$$

2. Poissonovy závorky jsou lineární, tj. pro $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1\{f_1, g\} + c_2\{f_2, g\}\ ; \qquad (200)$$

Tento vztah tedy ukazuje, že Poissonovy závorky jsou lineární v prvním argumentu. Z antisymetrie závorek vyplývá, že závorky jsou lineární i ve druhém argumentu.

3. Poissonovy závorky splňují tzv. **Jacobiho identitu**

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0\ ; \qquad (201)$$

4. Poissonovy závorky lze aplikovat i na součin funkcí

$$\{fg, h\} = \{f, h\}\, g + f\{g, h\}\ . \qquad (202)$$

Tento vztah vyplývá ze vztahu pro derivaci součinu dvou funkcí (tzv. Leibnitzovo pravidlo). Vzhledem k tomu, že výsledkem Poissonových závorek je funkce, lze např. člen $\{f,h\}g$ psát i ve tvaru $g\{f,h\}$, protože násobení funkcí je komutativní.

Ze vztahů (199), (200) a (201) vyplývá, že Poissonovy závorky definované na fázovém prostoru vztahem (198) tvoří tzv. Lieovu grupu (jsou to bilineární operace na vektorovém prostoru).

V kvantové mechanice se Poissonovy závorky stávají operátory a obecně už komutativní nejsou.

---