Fundamentální Poissonovy závorky

Dříve, než uvedeme speciální Poissonovy závorky a jejich fyzikální aplikace, připomeneme platnost jedné identity.

PRO FUNKCI $f\left(q^j, p_j, t\right)$ DEFINOVANOU VE FÁZOVÉM PROSTORU PLATÍ

$$\{f, f\} = 0. \tag{203}$$

Důkaz vztahu (203) vyplývá ze vztahu (199). Poissonovy závorky jsou antisymetrickou operací aplikovanou na dvě funkce (v tomto případě na dvě identické funkce *f*). Existuje jediné číslo (a to číslo 0), které se rovná svému opačnému číslu. Podle vztahu (199) se totiž při změně pořadí funkcí, na které aplikujeme Poissonovy závorky, mění jejich znaménko. Proto $\{f, f\} = -\{f, f\} = 0$.

Dosadíme-li nyní za obecné funkce *f* a *g*, pro které jsme vztahem (198) definovali Poissonovy závorky, zobecněné souřadnice $q^j(t)$ a kanonické hybnosti $p_j(t)$ můžeme vyslovit tvrzení.

PRO POISSONOVY ZÁVORKY APLIKOVANÉ NA ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE $q^j(t)$ A NA KANONICKÉ HYBNOSTI $p_j(t)$ PLATÍ TYTO VZTAHY

$$\left\{q^i, q^j\right\} = 0\,,\ \left\{p_i, p_j\right\} = 0 \text{ a } \left\{q^i, p_j\right\} = \delta^i_j \tag{204}$$

PRO $i, j = 1, 2, \dots, n$, KDE n JE POČET STUPŇŮ VOLNOSTI DANÉHO SYSTÉMU.

Důkaz prvních dvou částí tvrzení je snadný: zobecněné souřadnice $q^j(t)$ a kanonické hybnosti $p_j(t)$ jsou (pro všechny možné kombinace přípustných indexů) navzájem nezávislé. Uvědomíme-li si, že v definici Poissonových závorek (198) vystupují parciální derivace jak podle zobecněné souřadnice, tak podle kanonické hybnosti, je jasné, že výsledkem musí být nula.

Při derivaci funkce podle proměnné, na které daná funkce nezávisí, dostáváme nulu, neboť v dané proměnné (podle níž derivujeme) je funkce konstantní. A derivace konstanty je nula. Proto i derivace zobecněné souřadnice podle kanonické hybnosti (resp. naopak) je nulová.

Důkaz posledního ze vztahů (204) vyplývá z definice Poissonových závorek (198): $\left\{q^i, p_j\right\} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q^i}{\partial q^k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q^i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q^i}{\partial q^k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - 0\right) = \frac{\partial q^i}{\partial q^j}\frac{\partial p_j}{\partial p_j} = \frac{\partial q^i}{\partial q^i}\frac{\partial p_j}{\partial p_i} = \delta^i_j$.

Z definičního vztahu Poissonových závorek tedy zůstane jen první člen (druhý je identicky roven nule). A v závislosti na tom, zda budeme mít zobecněné souřadnice (resp. kanonické hybnosti) stejné či různé, získáme výsledek jedna nebo nule, což zapíšeme symbolem δ^i_j (Kroneckerovo delta).

Této vlastnosti Poissonových závorek sestavených ze zobecněných souřadnic a kanonických hybností se využívá v kvantové mechanice. Pomocí zobecněných souřadnic a kanonických hybností se definují příslušné operátory a získáme vztah analogický Poissonovým závorkám: $\left[\widehat{q^i}, \widehat{p_j}\right] = i\hbar\delta^i_j$. Z tohoto vztahu pak také vyplývá principiální nemožnost měřit současně libovolně přesně polohu a hybnost částice, což popisují tzv. Heisenbergovy relace neurčitosti.

Na základě Poissonových závorek lze dokázat následující tvrzení. Toto tvrzení i jeho důsledky pomohou při řešení řady úloh.

PRO SKUTEČNÝ POHYB PLATÍ

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{205}$$

KDE $f\left(q^j(t), p_j(t), t\right)$ (PRO $j = 1, 2, \dots, n$) JE LIBOVOLNÁ FUNKCE DEFINOVANÁ NA FÁZOVÉM PROSTORU A H JE HAMILTONIÁN UVAŽOVANÉHO SYSTÉMU.

Fráze „pro skutečný pohyb“ znamená, že funkce *f* splňuje Hamiltonovy kanonické rovnice (174).

Důkaz tvrzení provedeme rozepsáním totální derivace funkce $f\left(q^j(t), p_j(t), t\right)$ podle času. Platí $\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$. S využitím Hamiltonových kanonických rovnic můžeme dále psát $\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q^k}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$ a dále upravit s využitím definičního vztahu Poissonových závorek (198). Takže dostaneme $\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$, což je vztah, jehož platnost jsme chtěli dokázat.

Prvním důsledkem právě uvedeného tvrzení je podmínka, za které se funkce *f* stává integrálem pohybu.

Najít integrál pohybu je důležité, neboť každý integrál pohybu zjednoduší hledání řešení Lagrangeových rovnic druhého druhu.

NENÍ-LI FUNKCE $f\left(q^j(t), p_j(t)\right)$ ZÁVISLÁ NA ČASE, PAK TATO FUNKCE JE INTEGRÁLEM POHYBU PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ $\{f, H\} = 0$.

Funkce *f* nesmí tedy záviset na čase přímo; na čase ovšem mohou záviset zobecněné souřadnice nebo kanonické hybnosti, na kterých je závislá funkce *f*.

Nezávisí-li funkce *f* explicitně na čase, pak $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. To ovšem znamená, že na základě vztahu (205) můžeme psát $\frac{df}{dt} = \{f, H\}$. Dále víme, že funkce *f* je integrálem pohybu, jestliže platí vztah $\frac{df}{dt} = 0$. V tom případě ale $\{f, H\} = 0$.

Tento důsledek poskytuje návod na hledání integrálů pohybu: stačí ověřit, zda pro nějakou funkci *f*, která popisuje daný fyzikální systém s hamiltoniánem *H*, platí $\{f, H\} = 0$. Pokud ano, je funkce *f* integrálem pohybu.

Druhý důsledek vztahu (205) dává návod na určení, kdy sám hamiltonián daného systému je integrálem pohybu.

ČASOVĚ NEZÁVISLÝ HAMILTONIÁN H DANÉHO FYZIKÁLNÍHO SYSTÉMU JE INTEGRÁLEM POHYBU.

Na základě vztahu (203) můžeme psát $\{H, H\} = 0$ a skutečnost, že hamiltonián je nezávislý na čase, můžeme přepsat podmínkou $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Na základě vztahu (205), do kterého dosadíme $f = H$, pak můžeme psát $\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Podmínka $\frac{dH}{dt} = 0$ přitom určuje, že hamiltonián *H* je integrálem pohybu.

Právě uvedený důsledek souvisí s tím, že pokud je lagrangián *L* daného fyzikálního systému časově nezávislý, zachovává se zobecněná energie *h* definovaná vztahem (81). Časová nezávislost hamiltoniánu *H* pak souvisí se zákonem zachování mechanické energie *E*.

Třetí důsledek vztahu (205) udává podmínky, za kterých je integrálem pohybu přímo Poissonova závorka.

POKUD FUNKCE $f\left(q^j(t), p_j(t)\right)$ A $g\left(q^j(t), p_j(t)\right)$ JSOU INTEGRÁLY POHYBU, PAK $\{f, g\}$ JE TAKÉ INTEGRÁLEM POHYBU.

V argumentech funkcí *f* a *g* již neuvádíme jako parametr čas, protože mají-li být funkce *f* a *g* integrály pohybu, pak na čase záviset nesmí!

Při důkazu opět vyjdeme ze vztahu (205), který aplikujeme na Poissonovu závorku $\{f, g\}$: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\{f, g\}) = \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}(\{f, g\}) = \{\{f, g\}, H\}$, neboť jestliže jsou funkce *f* a *g* nezávislé na čase, je na čase nezávislá též jejich Poissonova závorka $\{f, g\}$, tedy $\frac{\partial}{\partial t}(\{f, g\}) = 0$. S využitím Jacobiho identity (201) můžeme dále psát $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\{f, g\}) = \{\{f, g\}, H\} = -\{\{g, H\}, f\} - \{\{H, f\}, g\}$. Jsou-li *f* a *g* integrály pohybu, pak pro ně platí $\{f, H\} = 0$ a $\{g, H\} = 0$, takže $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\{f, g\}) = -\{0, f\} - \{0, g\} = 0$. To ovšem znamená, že Poissonova závorka $\{f, g\}$ je integrálem pohybu. A to jsme měli dokázat.

Právě uvedeným způsobem by bylo možné přidávat postupně další funkce, které by byly integrály pohybu, a tak vytvořit obecně třeba i nekonečně mnoho integrálů pohybu. Ovšem integrálů pohybu, které pomohou při řešení pohybových rovnic, může být maximálně jen tolik, kolik je stupňů volnosti daného fyzikálního systému. Metoda Poissonových závorek, kterou jsme právě uvedli, tak totiž generuje i takové funkce, které jsou sice integrály pohybu, ale jsou lineárními kombinacemi již existujících integrálů pohybu nebo jsou nulové. A takové integrály pohybu již dále při řešení úloh nepomohou. Ale i přesto je právě uvedená konstrukce integrálů pohybu velmi důležitá.
