

## Vlastnosti kanonických transformací

[Kanonické transformace](#) mají některé zajímavé vlastnosti, které jsou užitečné i při řešení úloh.

[Generující funkce](#)  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  a  $F_4$  kanonické transformace nejsou nezávislé, ale jsou navzájem svázány Legendreovou duální transformací. Tu odvodil francouzský matematik Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833), který se zabýval hlavně statistikou, teorií čísel, algebrou a matematickou analýzou.

Vzájemná provázanost funkcí  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  a  $F_4$ , z nichž funkce  $F_1$  je dána (resp. určena výpočtem), je popsána těmito vztahy

$$F_2 = F_1 + \sum_{i=1}^n p_i Q^i, \quad F_3 = F_1 - \sum_{i=1}^n p_i Q^i \quad \text{a} \quad F_4 = F_1 - \sum_{i=1}^n p_i Q^i - \sum_{i=1}^n p_i p^i. \quad (212)$$

Místo toho, že všechny další funkce budeme vyjadřovat pomocí funkce  $F_1$  (vztahy (212)), lze vyjádřit zbývající funkce např. pomocí funkce  $F_2$ .

Na kterém řádku tab. 1 začneme s vyjadřováním, je jedno. Všechny její řádky jsou navzájem ekvivalentní.

Vztahy (212) jsou analogické vztahům, které v termodynamice popisují přechody mezi jednotlivými potenciály popisujícími daný fyzikální systém.

Další vlastností, na základě které se [práce](#) s kanonickými transformacemi zjednoduší, je skutečnost, že tyto transformace tvoří grupu.

### KANONICKÉ TRANSFORMACE TVOŘÍ GRUPU.

Jakmile o nějaké struktuře dokážeme, že tvoří grupu, je okamžitě jasné, že musí splňovat základní vlastnosti, které grupa prostě mít musí. Tak se mnohdy zjednoduší i fyzikální pohled na danou problematiku. Z faktu, že kanonické transformace tvoří grupu, vyplývá:

1. existence jednotkového prvku;

To je transformace, která nedělá nic - původní [zobecněné souřadnice](#) a [kanonické hybnosti](#) se nezmění.

2. existence inverzního prvku;
3. možnost skládání kanonických transformací.

Identita je generována funkcí  $F_2 = \sum_{j=1}^n p_j q^j$ . Na základě tab. 1 dostáváme  $\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = p_i$  a  $\frac{\partial F_2}{\partial p_k} = q^k$  a

výpočtem derivací podle předpisu funkce  $F_2$  máme  $\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = p_i$  a  $\frac{\partial F_2}{\partial p_k} = q^k$ . Transformace popsaná funkcí

$F_2$  je tedy kanonická, jestliže platí  $p_i = p_i$  a zároveň  $q^k = q^k$ . Neexistuje funkce  $F_1$  ani funkce  $F_4$ , které by generovaly identitu. Vztahy (212) sice platí obecně, ale nemusí platit u některých výjimečných kanonických transformací - např. u identity.