Hamiltonova - Jacobiho rovnice

Hamiltonova - Jacobiho teorie vychází z kanonických transformací, a proto připomeneme důležité vztahy, s nimiž budeme dále pracovat. Vyjdeme např. z generující funkce $F_1 = F_1\left(q^j, Q^j, t\right)$ (viz tab. 1) a z platnosti těchto vztahů:

$$\frac{\partial F_1}{\partial q^j} = p_j \,, \tag{215}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q^j} = -P_j \,, \tag{216}$$

$$H'\left(Q^j, P_j, t\right) = H\left(q^j, p_j, t\right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \,, \tag{217}$$

a z Hamiltonových kanonických rovnic ve tvaru

$$\frac{dQ^j}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_j} \quad \text{a} \quad \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial Q^j} \,. \tag{218}$$

Na vývoj systému, který chceme popsat, můžeme nahlížet jako na speciální kanonickou transformaci. A ze všech možných kanonických transformací budeme hledat tu nejjednodušší - takovou, pro níž platí

$$H' = 0 \,. \tag{219}$$

Je to podmínka sice velmi přísná, nicméně lze takový vývoj systému najít.

Na základě podmínky (219) budeme nyní hledat speciální generující funkci *S*, která generuje příslušnou kanonickou transformaci. Pro tuto funkci, která se nazývá akční funkcionál, platí

$$S\left(q^j, Q^j, t\right) = F_1 \,. \tag{220}$$

S využitím podmínky (219) lze psát Hamiltonovy kanonické rovnice (218) ve tvaru

$$\frac{dQ^j}{dt} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{dP_j}{dt} = 0 \,. \tag{221}$$

Z těchto rovnic okamžitě plyne

$$Q^j = \alpha_j = konst. \text{ a } P_j = -\beta_j = konst. \qquad (222)$$

Důvod, proč jsme druhou konstantu volili se znaménkem mínus, bude zřejmý z dalších výpočtů.

Písmeny α a β jsme označili konstanty, čísla. Proto píšeme jejich indexy dolů.

To ovšem znamená, že hmotný bod, jehož pohyb sledujeme, by stál na místě. Zatím jsme totiž nevzali v úvahu další vztahy. S využitím vztahů (220), (216) a (222) můžeme psát $\frac{\partial S\left(q^j, \alpha_j, t\right)}{\partial \alpha_j} = \beta_j$ a odtud najdeme funkci $q^j\left(t, \alpha_j, \beta_j\right)$ inverzí. Funkci *S* budeme hledat na základě rovnice

$$H\left(q^j, p_j, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,, \qquad (223)$$

kterou jsme získali na základě rovnice (217), podmínky (219) a definice funkce *S* (220).

Abychom našli skutečně kanonickou transformaci a postup výpočtu byl konzistentní, musíme použít i vztah (215). To znamená, že platí (s využitím definice funkce *S* (220)):

$$\frac{\partial S}{\partial q^j} = p_j\,. \qquad (224)$$

To znamená, že zobecněné souřadnice q^j a kanonické hybnosti p_j nejsou nezávislé.

Dosazením vztahu (224) do rovnice (223) získáme **Hamiltonovu - Jacobiho rovnici** ve tvaru

$$H\left(q^j, \frac{\partial S}{\partial q^j}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,. \qquad (225)$$

Získali jsme tak skutečně jednu jedinou rovnici, která popisuje vývoj daného fyzikálního systému.
