Postup řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice

Postup řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice (225) lze popsat v několika základních krocích:

1. určíme Hamiltonovu funkci daného fyzikálního systému: $H\left(q^{j}, p_{j}, t\right)$;
2. sestavíme Hamiltonovu - Jacobiho rovnici (225) tak, že místo p_{j} v nalezeném hamiltoniánu píšeme $\frac{\partial S}{\partial q^{j}}$;

Sestavili jsme tak jedinou parciální diferenciální rovnici prvního řádu, v níž vystupují parciální derivace $\frac{\partial S}{\partial t}$ a $\frac{\partial S}{\partial q^{j}}$. Neznámou v této rovnici je funkce $S\left(q^{j}, t\right)$ resp. $q^{j}(t)$, která popisuje vývoj daného fyzikálního systému.

3. sestavenou rovnici vyřešíme pomocí několika postupů, které lze z fyzikálního hlediska bez problémů provést

a) je-li hamiltonián nezávislý na čase, pak má funkce *S* tvar $S\left(q^{j}, t\right) = S_{0}\left(q^{j}\right) - Et$, kde *E* je zobecněná energie;

b) nezávisí-li hamiltonián na souřadnici q^{c}, má funkce *S* tvar $S\left(q^{j}\right) = S\left(q^{1}, q^{2}, \ldots, q^{c-1}, q^{c+1}, \ldots, q^{n}\right) + \alpha_{c} q^{c}$, kde $\alpha_{c} = konst.$;

Nejdříve je tedy nutné vyřešit čas, pak až souřadnice. Souřadnice q^{c}, na níž nezávisí hamiltonián (a tedy ani lagrangián) daného systému je cyklická souřadnice.

c) pokusit se řešit rovnici, kterou jsme předchozími úpravami získali z rovnice (225), separací proměnných, čímž získáme řešení ve tvaru: $S\left(q^{j}\right) = S_{1}\left(q^{1}\right) + S_{2}\left(q^{2}\right) + \ldots + S_{n}\left(q^{n}\right)$;

4. získali jsme tedy funkci *S* ve tvaru $S\left(q^{j}, \alpha_{j}, t\right)$, která obsahuje $n+1$ integračních konstant α_{j}, z nichž jedna je ovšem triviálně aditivní;

Konstant α_{j} je $n+1$, neboť *n* jich vznikne při integraci během hledání funkcí q^{j} a jedna vznikne při integraci podle času.

Triviálně aditivní je taková konstanta *C*, která vystupuje v zápise funkce $f(x)$ ve tvaru: $f(x) = F(x) + C$, tj. není „zabalená“ uvnitř funkce.

5. derivací podle *n* netriviálních parametrů α_{i} získáme *n* rovnic typu $\frac{\partial S}{\partial \alpha_{i}} = \beta_{i}$, kde β_{i} je dalších *n* libovolných konstant (pro $i = 1, 2, \ldots, n$);
6. inverzí získáme hledané řešení úlohy ve tvaru $q^{j}(t, \alpha_{i}, \beta_{i})$, v němž je 2*n* integračních konstant, které odpovídají *n* počátečním podmínkám pro zobecněné souřadnice q^{j} a *n* počátečním podmínkám pro kanonické hybnosti p_{j}.

Počet konstant odpovídajících počtu počátečních podmínek je v pořádku. Každá poloha a každá hybnost má svoji počáteční podmínku.

Příklad: Volný pád
Vyšetřete pohyb volného pádu tělesa o hmotnosti *m* v gravitačním poli.

Řešit volný pád pomocí Hamiltonovy - Jacobiho rovnice je trošku jako jít s kanónem na vrabce, ale volný pád je nejjednodušší pohyb, na kterém lze řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice ukázat. A jak je dále vidět, tak i přesto bude řešení poměrně náročné ...

Řešení: Budeme postupovat přesně ve shodě s výše uvedeným návodem na řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice:

Hamiltonián systému je: $H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2}{2m} - mgx$ (vzdálenost *x* měříme ve směru pádu tělesa).

Nyní vyjádříme hybnost pomocí funkce *S* ve tvaru $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, dosadíme do hamiltoniánu: $H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - mgx$ a sestavíme Hamiltonovu - Jacobiho rovnici: $\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - mgx + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$.
Pokud závisí funkce *S* na čase a hamiltonián sám na čase přímo nezávisí (obě podmínky jsou zde splněny), můžeme psát $S(x,t) = S_0(x) - Et$.
Určíme parciální časovou derivaci funkce *S*, která vystupuje v Hamiltonově - Jacobiho rovnici: $\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(S_0(x) - Et\right) = -E$, neboť $S_0(x)$ je na čase nezávislá.

Nyní tedy budeme řešit Hamiltonovu - Jacobiho rovnici ve tvaru $\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 - mgx - E = 0$. Vyjádříme hledanou derivaci funkce S_0 tak, že převedeme ostatní proměnné na druhou stranu rovnice, čímž získáme rovnici $\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 = 2m(mgx + E)$. Tu nyní odmocníme a dostaneme $\frac{\partial S_0}{\partial x} = \sqrt{2m(mgx + E)}$. Funkci S_0 nyní nalezneme integrací podle proměnné *x*: $S_0 = \int \sqrt{2m(mgx + E)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2m}\int \sqrt{mgx + E}\,\mathrm{d}x$.

Zavedeme substituci $k = \sqrt{mgx + E}$ a vyjádříme $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = \frac{mg}{2\sqrt{mgx + E}} = \frac{mg}{2k}$, odkud dostaneme $\mathrm{d}x = \frac{2k}{mg}\mathrm{d}k$.
Nyní můžeme pokračovat ve vlastní integraci:
$S_0 = \sqrt{2m}\int k\frac{2k}{mg}\mathrm{d}k = \frac{2\sqrt{2m}}{mg}\int k^2\,\mathrm{d}k = \frac{2\sqrt{2m}}{mg}\frac{k^3}{3} + C = \frac{2\sqrt{2m}}{3mg}\sqrt{(mgx + E)^3} + C$. Konstanta *C* zde přitom nehraje roli, neboť jí lze zahrnout do konstanty *E*. Pro funkci *S* tedy dostáváme $S(x,t) = S_0(x) - Et = \frac{2\sqrt{2m}}{3mg}\sqrt{(mgx + E)^3} - Et$.
Dále pokračujeme ve výpočtu derivací funkce *S* podle parametru *E*. Získáme tedy rovnost $-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{2\sqrt{2m}}{3mg}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{mgx + E} - t$, přičemž konstanta $-t_0$ má význam konstanty β z návodu na řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice.
Z posledního vztahu nyní postupně vyjádříme *x*.

$$\frac{\sqrt{2m}}{mg}\sqrt{mgx + E} = t - t_0$$

$$\sqrt{2m}\sqrt{mgx + E} = mg(t - t_0)$$

$$2m(mgx + E) = m^2g^2(t - t_0)^2$$

$$mgx + E = \frac{1}{2}mg^2(t - t_0)^2$$

Pro funkci *x* v závislosti na čase *t* tedy dostáváme $x = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 - \frac{E}{mg}$. Právě vypočtená závislost je z fyzikálního hlediska v pořádku, neboť skutečně popisuje volný pád tělesa o hmotnosti *m*. Konstanta $\frac{E}{mg}$ má význam výšky.