

## Postup řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice

Postup řešení [Hamiltonovy - Jacobiho rovnice](#) (225) lze popsat v několika základních krocích:

1. určíme [Hamiltonovu funkci](#) daného fyzikálního systému:  $H(q^j, p_j, t)$ ;
2. sestavíme Hamiltonovu - Jacobiho rovnici (225) tak, že místo  $p_j$  v nalezeném [hamiltoniánu](#) píšeme  $\frac{\partial S}{\partial q^j}$ ;

Sestavili jsme tak jedinou parciální diferenciální rovnici prvního řádu, v níž vystupují parciální derivace  $\frac{\partial S}{\partial t}$  a  $\frac{\partial S}{\partial q^j}$ . Neznámou v této rovnici je funkce  $S(q^j, t)$  resp.  $q^j(t)$ , která popisuje vývoj daného fyzikálního systému.

3. sestavenou rovnici vyřešíme pomocí několika postupů, které lze z fyzikálního hlediska bez problémů provést
  - a) je-li hamiltonián nezávislý na čase, pak má funkce  $S$  tvar  $S(q^j, t) = S_0(q^j) - Et$ , kde  $E$  je [zobecněná energie](#);
  - b) nezávisí-li hamiltonián na [souřadnici](#)  $q^c$ , má funkce  $S$  tvar  $S(q^j) = S(q^1, q^2, \dots, q^{c-1}, q^{c+1}, \dots, q^n) + \alpha_c q^c$ , kde  $\alpha_c = konst.$ ;

Nejdříve je tedy nutné vyřešit čas, pak až souřadnice. Souřadnice  $q^c$ , na níž nezávisí hamiltonián (a tedy ani [lagrangián](#)) daného systému je [cyklická souřadnice](#).

- c) pokusit se řešit rovnici, kterou jsme předchozími úpravami získali z rovnice (225), separací proměnných, čímž získáme řešení ve tvaru:  $S(q^j) = S_1(q^1) + S_2(q^2) + \dots + S_n(q^n)$ ;
4. získali jsme tedy funkci  $S$  ve tvaru  $S(q^j, \alpha_j, t)$ , která obsahuje  $n+1$  integračních konstant  $\alpha_j$ , z nichž jedna je ovšem triviálně aditivní;

Konstant  $\alpha_j$  je  $n+1$ , neboť  $n$  jich vznikne při integraci během hledání funkcí  $q^j$  a jedna vznikne při integraci podle času.

Triviálně aditivní je taková konstanta  $C$ , která vystupuje v zápise funkce  $f(x)$  ve tvaru:  $f(x) = F(x) + C$ , tj. není „zabalená“ uvnitř funkce.

5. derivací podle  $n$  netriviálních parametrů  $\alpha_i$  získáme  $n$  rovnic typu  $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ , kde  $\beta_i$  je dalších  $n$  libovolných konstant (pro  $i = 1, 2, \dots, n$ );
6. inverzí získáme hledané řešení úlohy ve tvaru  $q^j(t, \alpha_i, \beta_i)$ , v němž je  $2n$  integračních konstant, které odpovídají  $n$  počátečním podmínkám pro [zobecněné souřadnice](#)  $q^j$  a  $n$  počátečním podmínkám pro [kanonické hybnosti](#)  $p_j$ .

Počet konstant odpovídajících počtu počátečních podmínek je v pořádku. Každá poloha a každá [hybnost](#) má svoji počáteční podmínku.

**Příklad:** [Volný pád](#)

Vyšetřete [pohyb](#) volného pádu tělesa o hmotnosti  $m$  v [gravitačním poli](#).

Řešit volný pád pomocí Hamiltonovy - Jacobiho rovnice je trošku jako jít s kanónem na vrabce, ale volný pád je nejjednodušší pohyb, na kterém lze řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice ukázat. A jak je dále vidět, tak i přesto bude řešení poměrně náročné ...

**Řešení:** Budeme postupovat přesně ve shodě s výše uvedeným návodem na řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice:

Hamiltonián systému je:  $H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2}{2m} - mgx$  (vzdálenost  $x$  měříme ve směru pádu tělesa).

Nyní vyjádříme hybnost pomocí funkce  $S$  ve tvaru  $p = \frac{\partial S}{\partial x}$ , dosadíme do hamiltoniánu:

$$H = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - mgx \text{ a sestavíme Hamiltonovu - Jacobiho rovnici: } \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - mgx + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Pokud závisí funkce  $S$  na čase a hamiltonián sám na čase přímo nezávisí (obě podmínky jsou zde splněny), můžeme psát  $S(x, t) = S_0(x) - Et$ .

Určíme parciální časovou derivaci funkce  $S$ , která vystupuje v Hamiltonově - Jacobiho rovnici:

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (S_0(x) - Et) = -E, \text{ neboť } S_0(x) \text{ je na čase nezávislá.}$$

Nyní tedy budeme řešit Hamiltonovu - Jacobiho rovnici ve tvaru  $\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 - mgx - E = 0$ . Vyjádříme

hledanou derivaci funkce  $S_0$  tak, že převedeme ostatní proměnné na druhou stranu rovnice, čímž získáme rovnici  $\left( \frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 = 2m(mgx + E)$ . Tu nyní odmocníme a dostaneme  $\frac{\partial S_0}{\partial x} = \sqrt{2m(mgx + E)}$ . Funkci

$$S_0 \text{ nyní nalezneme integrací podle proměnné } x: S_0 = \int \sqrt{2m(mgx + E)} dx = \sqrt{2m} \int \sqrt{mgx + E} dx.$$

Zavedeme substituci  $k = \sqrt{mgx + E}$  a vyjádříme  $\frac{dk}{dx} = \frac{mg}{2\sqrt{mgx + E}} = \frac{mg}{2k}$ , odkud dostaneme  $dx = \frac{2k}{mg} dk$ .

Nyní můžeme pokračovat ve vlastní integraci:

$$S_0 = \sqrt{2m} \int k \frac{2k}{mg} dk = \frac{2\sqrt{2m}}{mg} \int k^2 dk = \frac{2\sqrt{2m}}{mg} \frac{k^3}{3} + C = \frac{2\sqrt{2m}}{3mg} \sqrt{(mgx + E)^3} + C. \text{ Konstanta } C \text{ zde přitom nehraje}$$

roli, neboť jí lze zahrnout do konstanty  $E$ . Pro funkci  $S$  tedy dostáváme

$$S(x, t) = S_0(x) - Et = \frac{2\sqrt{2m}}{3mg} \sqrt{(mgx + E)^3} - Et.$$

Dále pokračujeme ve výpočtu derivací funkce  $S$  podle parametru  $E$ . Získáme tedy rovnost

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{2\sqrt{2m}}{3mg} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{mgx + E} - t, \text{ přičemž konstanta } -t_0 \text{ má význam konstanty } \beta \text{ z návodu na řešení}$$

Hamiltonovy - Jacobiho rovnice.

Z posledního vztahu nyní postupně vyjádříme  $x$ .

$$\frac{\sqrt{2m}}{mg} \sqrt{mgx + E} = t - t_0$$

$$\sqrt{2m} \sqrt{mgx + E} = mg(t - t_0)$$

$$2m(mgx + E) = m^2 g^2 (t - t_0)^2$$

$$mgx + E = \frac{1}{2} m g^2 (t - t_0)^2$$

Pro funkci  $x$  v závislosti na čase  $t$  tedy dostáváme  $x = \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 - \frac{E}{mg}$ . Právě vypočtená závislost je

z fyzikálního hlediska v pořádku, neboť skutečně popisuje volný pád tělesa o hmotnosti  $m$ .

Konstanta  $\frac{E}{mg}$  má význam výšky.