

Postup řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice

Postup řešení [Hamiltonovy - Jacobiho rovnice](#) (225) lze popsat v několika základních krocích:

1. určíme [Hamiltonovu funkci](#) daného fyzikálního systému: $H(q^j, p_j, t)$;
2. sestavíme Hamiltonovu - Jacobiho rovnici (225) tak, že místo p_j v nalezeném [hamiltoniánu](#) píšeme $\frac{\partial S}{\partial q^j}$;

Sestavili jsme tak jedinou parciální diferenciální rovnici prvního řádu, v níž vystupují parciální derivace $\frac{\partial S}{\partial t}$ a $\frac{\partial S}{\partial q^j}$. Neznámou v této rovnici je funkce $S(q^j, t)$ resp. $q^j(t)$, která popisuje vývoj daného fyzikálního systému.

3. sestavenou rovnici vyřešíme pomocí několika postupů, které lze z fyzikálního hlediska bez problémů provést
 - a) je-li hamiltonián nezávislý na čase, pak má funkce S tvar $S(q^j, t) = S_0(q^j) - Et$, kde E je [zobecněná energie](#);
 - b) nezávisí-li hamiltonián na [souřadnici](#) q^c , má funkce S tvar $S(q^j) = S(q^1, q^2, \dots, q^{c-1}, q^{c+1}, \dots, q^n) + \alpha_c q^c$, kde $\alpha_c = \text{konst.}$;

Nejdříve je tedy nutné vyřešit čas, pak až souřadnice. Souřadnice q^c , na níž nezávisí hamiltonián (a tedy ani [lagrangián](#)) daného systému je [cyklická souřadnice](#).

- c) pokusit se řešit rovnici, kterou jsme předchozími úpravami získali z rovnice (225), separací proměnných, čímž získáme řešení ve tvaru: $S(q^j) = S_1(q^1) + S_2(q^2) + \dots + S_n(q^n)$;
4. získali jsme tedy funkci S ve tvaru $S(q^j, \alpha_j, t)$, která obsahuje $n+1$ integračních konstant α_j , z nichž jedna je ovšem triviálně aditivní;

Konstant α_j je $n+1$, neboť n jich vznikne při integraci během hledání funkcí q^j a jedna vznikne při integraci podle času.

Triviálně aditivní je taková konstanta C , která vystupuje v zápise funkce $f(x)$ ve tvaru: $f(x) = F(x) + C$, tj. není „zabalená“ uvnitř funkce.

5. derivací podle n netriviálních parametrů α_i získáme n rovnic typu $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$, kde β_i je dalších n libovolných konstant (pro $i = 1, 2, \dots, n$);
6. inverzí získáme hledané řešení úlohy ve tvaru $q^j(t, \alpha_i, \beta_i)$, v němž je $2n$ integračních konstant, které odpovídají n počátečním podmínkám pro [zobecněné souřadnice](#) q^j a n počátečním podmínkám pro [kanonické hybnosti](#) p_j .

Počet konstant odpovídajících počtu počátečních podmínek je v pořádku. Každá poloha a každá [hybnost](#) má svoji počáteční podmínku.

Příklad: [Volný pád](#)

Vyšetřete [pohyb](#) volného pádu tělesa o hmotnosti m v [gravitačním poli](#).

Řešit volný pád pomocí Hamiltonovy - Jacobiho rovnice je trošku jako jít s kanónem na vrabce, ale volný pád je nejjednodušší pohyb, na kterém lze řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice ukázat. A jak je dále vidět, tak i přesto bude řešení poměrně náročné ...

Řešení: Budeme postupovat přesně ve shodě s výše uvedeným návodem na řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice:

Hamiltonián systému je: $H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2}{2m} - mgx$ (vzdálenost x měříme ve směru pádu tělesa).

Nyní vyjádříme hybnost pomocí funkce S ve tvaru $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, dosadíme do hamiltoniánu:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - mgx \text{ a sestavíme Hamiltonovu - Jacobiho rovnici: } \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - mgx + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Pokud závisí funkce S na čase a hamiltonián sám na čase přímo nezávisí (obě podmínky jsou zde splněny), můžeme psát $S(x, t) = S_0(x) - Et$.

Určíme parciální časovou derivaci funkce S , která vystupuje v Hamiltonově - Jacobiho rovnici:

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (S_0(x) - Et) = -E, \text{ neboť } S_0(x) \text{ je na čase nezávislá.}$$

Nyní tedy budeme řešit Hamiltonovu - Jacobiho rovnici ve tvaru $\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 - mgx - E = 0$. Vyjádříme

hledanou derivaci funkce S_0 tak, že převedeme ostatní proměnné na druhou stranu rovnice, čímž získáme rovnici $\left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 = 2m(mgx + E)$. Tu nyní odmocníme a dostaneme $\frac{\partial S_0}{\partial x} = \sqrt{2m(mgx + E)}$. Funkci

$$S_0 \text{ nyní nalezneme integrací podle proměnné } x: S_0 = \int \sqrt{2m(mgx + E)} dx = \sqrt{2m} \int \sqrt{mgx + E} dx.$$

Zavedeme substituci $k = \sqrt{mgx + E}$ a vyjádříme $\frac{dk}{dx} = \frac{mg}{2\sqrt{mgx + E}} = \frac{mg}{2k}$, odkud dostaneme $dx = \frac{2k}{mg} dk$.

Nyní můžeme pokračovat ve vlastní integraci:

$$S_0 = \sqrt{2m} \int k \frac{2k}{mg} dk = \frac{2\sqrt{2m}}{mg} \int k^2 dk = \frac{2\sqrt{2m}}{mg} \frac{k^3}{3} + C = \frac{2\sqrt{2m}}{3mg} \sqrt{(mgx + E)^3} + C. \text{ Konstanta } C \text{ zde přitom nehraje}$$

roli, neboť jí lze zahrnout do konstanty E . Pro funkci S tedy dostáváme

$$S(x, t) = S_0(x) - Et = \frac{2\sqrt{2m}}{3mg} \sqrt{(mgx + E)^3} - Et.$$

Dále pokračujeme ve výpočtu derivací funkce S podle parametru E . Získáme tedy rovnost

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{2\sqrt{2m}}{3mg} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{mgx + E} - t, \text{ přičemž konstanta } -t_0 \text{ má význam konstanty } \beta \text{ z návodu na řešení}$$

Hamiltonovy - Jacobiho rovnice.

Z posledního vztahu nyní postupně vyjádříme x .

$$\frac{\sqrt{2m}}{mg} \sqrt{mgx + E} = t - t_0$$

$$\sqrt{2m} \sqrt{mgx + E} = mg(t - t_0)$$

$$2m(mgx + E) = m^2 g^2 (t - t_0)^2$$

$$mgx + E = \frac{1}{2} m g^2 (t - t_0)^2$$

Pro funkci x v závislosti na čase t tedy dostáváme $x = \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 - \frac{E}{mg}$. Právě vypočtená závislost je

z fyzikálního hlediska v pořádku, neboť skutečně popisuje volný pád tělesa o hmotnosti m .

Konstanta $\frac{E}{mg}$ má význam výšky.