Zavedení úhlové rychlosti

Uvažujme libovolný časově závislý vektor $\vec{w}(t)$, který budeme zkoumat jak v pevné bázi $\{\vec{e}_i\}$, tak v korotující bázi $\{\vec{e}\,'_i(t)\}$.

Korotující báze $\{\vec{e}\,'_i(t)\}$ je skutečně závislá na čase, neboť rotuje spolu s tuhým tělesem.

Souřadnice $w_i(t)$ resp. $w'_i(t)$ vektoru $\vec{w}(t)$ můžeme vyjádřit v obou uvažovaných bázích pomocí vztahů

$$\vec{w}(t) = w_i(t)\vec{e}_i \tag{229}$$

resp.

$$\vec{w}(t) = w'_i(t)\vec{e}\,'_i(t)\,. \tag{230}$$

Ve vztahu (230) se mění v závislosti na čase jak souřadnice uvažovaného vektoru, tak vektory korotující báze. Pro bázové vektory obou bází přitom platí vztahy

$$\vec{e}\,'_i(t) = A_{ik}(t)\vec{e}_k \quad \text{a} \quad \vec{e}_k(t) = A_{jk}(t)\vec{e}\,'_j \tag{231}$$

a dále platí

$$A_{lk}A_{ik} = \delta_{li}\,. \tag{232}$$

Vztahy (231) a (232) jsou analogické jako vztahy (226) a (227) jsou jen přepsány ve vhodných indexech pro další odvozování. Pro časovou změnu vektoru $\vec{w}(t)$ vůči pevnému inerciálnímu systému můžeme postupně psát:

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw_i(t)}{dt}\vec{e}_i = \frac{dw'_i(t)}{dt}\vec{e}\,'_i(t) + w'_i(t)\frac{d\vec{e}\,'_i(t)}{dt}\,. \tag{233}$$

Vektor $\vec{w}(t)$ popisujeme vzhledem k pevnému inerciálnímu systému, ale vyjádřili jsme ho jak z hlediska pevné báze, tak z hlediska korotující báze.

Byly by další dvě možnosti, jak situaci vyšetřovat: definovat vektor vzhledem k soustavě, která se pohybuje spolu s tuhým tělesem a vyjádřit ho jak v korotující bázi (její vektory by se v čase neměnily), tak v pevné bázi, jejíž vektory by se tentokráte měnily. Vztažná soustava by se totiž vůči pevné bázi pohybovala.

S využitím obou vztahů (231), můžeme vztah (233) přepsat ve tvaru $\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw'_i(t)}{dt}\vec{e}\,'_i(t) + w'_i(t)\frac{dA_{ik}(t)}{dt}\vec{e}_k = \frac{dw'_i(t)}{dt}\vec{e}\,'_i(t) + w'_i(t)\frac{dA_{ik}(t)}{dt}A_{jk}(t)\vec{e}\,'_j$. Dostáváme tedy vztah

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw'_i(t)}{dt}\vec{e}\,'_i(t) + w'_i(t)\,\Omega'_{ij}\vec{e}\,'_j\,, \tag{234}$$

v němž jsme označili

$$\Omega'_{ij} = \frac{dA_{ik}}{dt}A_{jk}\,. \tag{235}$$

Vztah (235) lze též zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\mathbf{\Omega} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^T ; \tag{236}$$

zavedli jsme tedy matici $\mathbf{\Omega}$ s prvky Ω'_{ij} definovanými vztahem (235).

Důvod, proč je matice značená bez čárky a její prvky s čárkou, bude vysvětlen později.

Lze vyslovit následující tvrzení:

MATICE $\mathbf{\Omega}$ JE ANTISYMETRICKÁ.

Toto tvrzení snadno dokážeme. Prvky matice $\mathbf{\Omega}$ splňují relace ortogonality (232), neboť na základě nich byla matice $\mathbf{\Omega}$ odvozena. Časovou derivací vztahu (232) dostaneme $\frac{dA_{ik}}{dt}A_{jk} + A_{ik}\frac{dA_{jk}}{dt} = 0$, odkud vyjádříme $\frac{dA_{ik}}{dt}A_{jk} = -A_{ik}\frac{dA_{jk}}{dt}$. Vzhledem k symetričnosti matice **A** můžeme psát $\frac{dA_{ik}}{dt}A_{jk} = -\frac{dA_{jk}}{dt}A_{ik}$ a na základě vztahu (235) dostaneme $\Omega'_{ij} = -\Omega'_{ji}$, což znamená, že matice $\mathbf{\Omega}$ je antisymetrická a má tedy jen tři nezávislé prvky. Podle právě odvozeného vztahu je zřejmé, že na hlavní diagonále matice $\mathbf{\Omega}$ jsou nuly, takže zbývá určit její tři nezávislé prvky. Ostatní tři jsou již jednoznačně určeny - jsou to opačná čísla k číslům vyjadřující ony tři nezávislé prvky uvažované matice.

Proto můžeme provést tzv. přirozené mapování (přirozené zobrazení, operaci duality), při kterém antisymetrické matici přiřadíme vektor $\vec{\Omega}$ se složkami:

$$\Omega'_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega'_{jk} , \tag{237}$$

kde ε_{ijk} je Lewi-Civitův symbol (Lewi-Civitův tenzor). Provedeme-li naznačený součet podle proměnné *k*, dostaneme

$$\vec{\Omega} = (\Omega'_1; \Omega'_2; \Omega'_3) = (\Omega'_{23}; -\Omega'_{13}; \Omega'_{12}) . \tag{238}$$

Pro *i*-tou složku vektoru $\vec{\Omega}$ můžeme totiž psát $\Omega'_i = \frac{1}{2}(\varepsilon_{i12}\Omega'_{12} + \varepsilon_{i13}\Omega'_{13} + \varepsilon_{i21}\Omega'_{21} + \varepsilon_{i23}\Omega'_{23} + \varepsilon_{i31}\Omega'_{31} + \varepsilon_{i32}\Omega'_{32})$, přičemž jsme nepsali ty členy, které rovnou obsahují dva stejné indexy (např. $\varepsilon_{i22}\Omega'_{22}$). Lewi-Civitiův symbol, který má dva indexy stejné, je totiž nulový.

Vektor $\vec{\Omega}$ definovaný vztahem (237) je **vektor úhlové rychlosti otáčení tuhého tělesa**.
K vektoru $\vec{\Omega}$ je nutné uvést několik poznámek:

1. $\vec{\Omega}$ je duální pseudovektor a to proto, že přirozené mapování provedené vztahem (237) (tj. definice jednotlivých složek vektoru $\vec{\Omega}$) není jednoznačné: při změně levotočivé báze na pravotočivou bázi (nebo naopak) se změní znaménka jeho souřadnic. Tato změna znamének by ale neměla nastávat často - ve fyzice se k popisu pohybujících se hmotných bodů a těles používá levotočivý kartézský systém souřadnic (tj. ten, který má osy *x*, *y* a *z* orientovány podle pravidla pravé ruky). Skutečnost, že $\vec{\Omega}$ je pseudovektor vyplývá z toho, že i Levi-Civitův symbol ε_{ijk} je pseudovektor.
2. Přiřazení pomocí vztahu (237) lze korektně provést jen ve trojrozměrném prostoru, neboť matice $\mathbf{\Omega}$ má tři nezávislé prvky a vektor $\vec{\Omega}$ má také tři nezávislé složky.

V teorii relativity, v teorii elektromagnetického pole a dalších oborech fyziky je nutné popisované přiřazení provést tak, že matici přiřadíme matici (nikoliv vektor).

3. Vektor $\vec{\Omega}$ má složky definované vůči korotující bázi $\{\vec{e}_{\mathrm{i}}'\}$, proto jsou jeho složky i prvky matice $\mathbf{\Omega}$ označeny symboly Ω_{i}' resp. Ω_{ij}'.

Tím je vysvětlen zdánlivý rozpor ve značení ve vztazích (235) a (236).

Analogicky lze vytvořit z vektoru matici, tj. napsat ke vztahu (237) duální vztah ve tvaru

$$\Omega_{\mathrm{li}}' = \varepsilon_{\mathrm{lik}} \Omega_{\mathrm{k}}' . \tag{239}$$

Ve vztahu (239) ve srovnání se vztahem (237) chybí činitel 0,5. To proto, že na levé straně vztahu (239) je veličina indexovaná dvěma indexy a existuje tedy jediná možnost přiřazení.

Nyní budeme pokračovat v úpravě vztahu (234), ve kterém nejdříve provedeme záměnu indexů:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{w}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{i}}'(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{i}}'(t) + w_{\mathrm{i}}'(t)\,\Omega_{\mathrm{ij}}'\vec{e}_{\mathrm{j}}' = \frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{i}}'(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{i}}'(t) + w_{\mathrm{l}}'(t)\,\Omega_{\mathrm{li}}'\vec{e}_{\mathrm{i}}' .$$

Tato úprava se používá proto, aby se zpřehlednil zápis daného vztahu nebo aby se sjednotilo značení indexů u veličin, které spolu souvisejí.

Dosazením ze vztahu (239) získáme $\frac{\mathrm{d}\vec{w}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{i}}'(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{i}}'(t) + w_{\mathrm{l}}'(t)\,\varepsilon_{\mathrm{lik}}\Omega_{\mathrm{k}}'\vec{e}_{\mathrm{i}}'$. Provedením cyklické záměny indexů Levi-Civitova symbolu dostaneme $\frac{\mathrm{d}\vec{w}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{i}}'(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{i}}'(t) + \varepsilon_{\mathrm{ikl}}\Omega_{\mathrm{k}}' w_{\mathrm{l}}'(t)\vec{e}_{\mathrm{i}}'$. Souřadnici $w_{\mathrm{l}}'(t)$ vektoru $\vec{w}$ můžeme v daném součinu umístit na jakékoliv místo, neboť $w_{\mathrm{l}}'(t)$ je složka vektoru (tedy číslo). Další úpravou je využití definice vektorového součinu:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{w}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{i}}'(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{i}}'(t) + \left(\vec{\Omega}\times\vec{w}\right)_{\mathrm{i}}'\vec{e}_{\mathrm{i}}' . \tag{240}$$

Tento vztah popisuje časovou derivaci libovolného vektoru $\vec{w}$ vzhledem ke zvolenému inerciálnímu systému v prostoru vyjádřenou v korotující bázi $\{\vec{e}_{\mathrm{i}}'\}$. V právě uvedeném vztahu popisuje člen $\frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{i}}'(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{i}}'(t)$ změnu vektoru $\vec{w}$, jehož souřadnice jsou definovány vztahy (229) a (230), vůči korotující bázi $\{\vec{e}_{\mathrm{i}}'\}$ a člen $\left(\vec{\Omega}\times\vec{w}\right)_{\mathrm{i}}'\vec{e}_{\mathrm{i}}'$ odpovídá přechodu mezi dvěma bázemi při popisu uvažovaného tuhého tělesa rotujícího úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$.

Platí-li daný vztah mezi určitými vektory v jedné bázi, platí v každé bázi. Proto můžeme psát

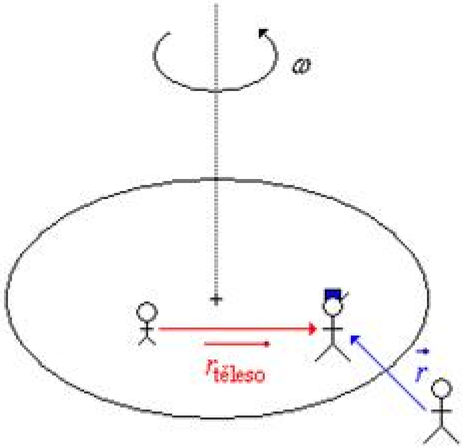
$$\frac{\mathrm{d}\vec{w}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{w_{\text{těleso}}}(t)}{\mathrm{d}t} + \vec{\Omega}\times\vec{w} \tag{241}$$

bez ohledu na konkrétní bázi.

Tento vztah je velmi důležitý, a proto vyžaduje několik komentářů:

1. $\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t}$ a $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{w_{\text{těleso}}}}{\mathrm{d}t}$ jsou dva různé vektory, nikoliv jeden vektor vyjádřený v různých bázích;
2. pokud zvolíme $\vec{w} = \vec{r}$, kde $\vec{r}$ je polohový vektor popisující polohu objektu na rotujícím tuhém tělesu, pak člen $\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ definuje rychlost pohybu hmotného bodu na tuhém tělese vůči vnějšímu pozorovateli;
3. při stejné volbě pak člen $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{w_{\text{těleso}}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r_{\text{těleso}}}}{\mathrm{d}t}$ definuje rychlost pohybu hmotného bodu na

tuhém tělese vůči tomuto tuhému tělesu



Obr. 60

Můžeme si představit situaci zobrazenou na obr. 60. Po kolotoči se pohybuje technik a jeho pohyb pozoruje dítě na kolotoči i pozorovatel mimo kolotoč. Dítě na kolotoči vnímá pouze vlastní pohyb technika vůči kolotoči (popsaný výrazem $\frac{d\vec{w}_{těleso}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{těleso}}{dt}$), zatímco pozorovatel zvenčí vidí rotační pohyb technika na kolotoči: k tomu, co pozoruje dítě musí přidat ještě oběžný pohyb kolotoče (člen $\vec{\Omega} \times \vec{w} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ ve výrazu (241)).

Kolotoč zobrazený na obr. 60 představuje speciální otáčení: otáčení s pevnou osou (rotace s pevnou osou).