

## Skládání rotací a vektorů úhlových rychlostí

**OTÁČENÍ TĚLESA NENÍ OBECNĚ KOMUTATIVNÍ, ALE SKLÁDÁNÍ ÚHLOVÝCH RYCHLOSTÍ KOMUTATIVNÍ JE: VEKTORY ÚHLOVÝCH RYCHLOSTI SE SKLÁDAJÍ LINEÁRNĚ.**

Úhlové rychlosti se tedy skládají jako „normální“ vektory.

Provedeme důkaz uvedeného tvrzení. Uvažujme první ortogonální matici  $\mathbf{A}$ , která je maticí přechodu od báze  $\{\vec{e}_k\}$  k bázi  $\{\vec{e}_i^A\}$  a popisuje první otočení tuhého tělesa. To znamená, že platí transformační vztah (226). Dále uvažujme druhou ortogonální matici  $\mathbf{B}$  popisující druhé otočení tuhého tělesa, kterou lze považovat za matici přechodu od báze  $\{\vec{e}_i^A\}$  k bázi  $\{\vec{e}_j^B\}$  definovanou vztahem

$$\vec{e}_j^B = B_{ji} \vec{e}_i^A. \quad (244)$$

Složením obou otočení získáme

$$\vec{e}_j^B = B_{ji} \vec{e}_i^A = B_{ji} A_{ik} \vec{e}_k = C_{jk} \vec{e}_k, \quad (245)$$

kde matice  $\mathbf{C}$  je definována vztahem

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (246)$$

Vzhledem k tomu, že násobení matic není obecně komutativní, není obecně komutativní ani skládání otočení tuhého tělesa.

Nyní dokážeme, že vektory úhlové rychlosti se skládají lineárně. Vyjdeme z definice (236) matice  $\Omega$  a pro matici  $\Omega^C$  popisující úhlovou rychlost otáčení tuhého tělesa charakterizovanou maticí  $\mathbf{C}$  můžeme psát  $\Omega^C = \frac{d\mathbf{C}}{dt} \mathbf{C}^T$ . S využitím vztahu (246) dále postupnými úpravami dostáváme

$\Omega^C = \frac{d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})}{dt} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^T = \left( \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$ . Ze vztahu (228) vyplývá, že  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$ , kde  $\mathbf{E}$  je jednotková matice. Proto můžeme dále psát  $\Omega^C = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T = \Omega^{B'} + \mathbf{B} \Omega^A \mathbf{B}^T$ . V poslední úpravě jsme využili opět definiční vztah matice  $\Omega^{B'}$  resp.  $\Omega^A$ . Uvědomíme-li si, že matice  $\mathbf{B} \Omega^A \mathbf{B}^T$  popisuje transformaci matice  $\mathbf{A}$  z báze  $\{\vec{e}_i^A\}$  do báze  $\{\vec{e}_j^B\}$ , můžeme napsat finální vztah ve tvaru

$$\Omega^C = \Omega^{B'} + \Omega^A. \quad (247)$$

Čárky v indexech u matic konkretizují, v jaké bázi je příslušná matice definována.

Obecně tedy pro vektory úhlové rychlosti popisující otáčení tuhého tělesa kolem různých os platí

$$\Omega^C = \Omega^B + \Omega^A. \quad (248)$$