Skládání rotací a vektorů úhlových rychlostí

OTÁČENÍ TĚLESA NENÍ OBECNĚ KOMUTATIVNÍ, ALE SKLÁDÁNÍ ÚHLOVÝCH RYCHLOSTÍ KOMUTATIVNÍ JE: VEKTORY ÚHLOVÝCH RYCHLOSTI SE SKLÁDAJÍ LINEÁRNĚ.

Úhlové rychlosti se tedy skládají jako „normální“ vektory.

Provedeme důkaz uvedeného tvrzení. Uvažujme první ortogonální matici **A**, která je maticí přechodu od báze $\{\vec{e}_k\}$ k bázi $\{\vec{e}'_i\}$ a popisuje první otočení tuhého tělesa. To znamená, že platí transformační vtah (226). Dále uvažujme druhou ortogonální matici **B** popisující druhé otočení tuhého tělesa, kterou lze považovat za matici přechodu od báze $\{\vec{e}'_i\}$ k bázi $\{\vec{e}''_j\}$ definovanou vztahem

$$\vec{e}''_j = B_{ji}\vec{e}'_i \,. \tag{244}$$

Složením obou otočení získáme

$$\vec{e}''_j = B_{ji}\vec{e}'_i = B_{ji}A_{ik}\vec{e}_k = C_{jk}\vec{e}_k \,, \tag{245}$$

kde matice **C** je definována vztahem

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}.\mathbf{A} \,. \tag{246}$$

Vzhledem k tomu, že násobení matic není obecně komutativní, není obecně komutativní ani skládání otočení tuhého tělesa.

Nyní dokážeme, že vektory úhlové rychlosti se skládají lineárně. Vyjdeme z definice (236) matice $\boldsymbol{\Omega}$ a pro matici $\boldsymbol{\Omega}^{C''}$ popisující úhlovou rychlost otáčení tuhého tělesa charakterizovanou maticí **C** můžeme psát $\boldsymbol{\Omega}^{C''} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{C}}{\mathrm{d}t}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$. S využitím vztahu (246) dále postupnými úpravami dostáváme $\boldsymbol{\Omega}^{C''} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{B}.\mathbf{A})}{\mathrm{d}t}.(\mathbf{B}.\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}.\mathbf{A} + \mathbf{B}.\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right).\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}.\mathbf{A}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{B}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}.\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$. Ze vztahu (228) vyplývá, že $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$, kde **E** je jednotková matice. Proto můžeme dále psát $\boldsymbol{\Omega}^{C''} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}.\mathbf{B}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}.\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Omega}^{B''} + \mathbf{B}.\boldsymbol{\Omega}^{A'}.\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$. V poslední úpravě jsme využili opět definiční vztah matice $\boldsymbol{\Omega}^{B''}$ resp. $\boldsymbol{\Omega}^{A'}$. Uvědomíme-li si, že matice $\mathbf{B}.\boldsymbol{\Omega}^{A'}.\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ popisuje transformaci matice **A** z báze $\{\vec{e}'_i\}$ do báze $\{\vec{e}''_i\}$, můžeme napsat finální vztah ve tvaru

$$\boldsymbol{\Omega}^{C''} = \boldsymbol{\Omega}^{B''} + \boldsymbol{\Omega}^{A''} \,. \tag{247}$$

Čárky v indexech u matic konkretizují, v jaké bázi je příslušná matice definována.

Obecně tedy pro vektory úhlové rychlosti popisující otáčení tuhého tělesa kolem různých os platí

$$\boldsymbol{\Omega}^{C} = \boldsymbol{\Omega}^{B} + \boldsymbol{\Omega}^{A} \,. \tag{248}$$