Skládání rotací a vektorů úhlových rychlostí

OTÁČENÍ TĚLESA NENÍ OBECNĚ KOMUTATIVNÍ, ALE SKLÁDÁNÍ ÚHLOVÝCH [RYCHLOSTÍ](#) KOMUTATIVNÍ JE: VEKTORY ÚHLOVÝCH RYCHLOSTI SE SKLÁDAJÍ LINEÁRNĚ.

Úhlové rychlosti se tedy skládají jako „normální“ vektory.

Provedeme důkaz uvedeného tvrzení. Uvažujme první ortogonální matici **A**, která je maticí přechodu od báze $\{\vec{e_k}\}$ k bázi $\{\vec{e'_i}\}$ a popisuje první otočení tuhého tělesa. To znamená, že platí transformační vtah (226). Dále uvažujme druhou ortogonální matici **B** popisující druhé otočení tuhého tělesa, kterou lze považovat za matici přechodu od báze $\{\vec{e'_i}\}$ k bázi $\{\vec{e''_j}\}$ definovanou vztahem

$$\vec{e''_j} = B_{ji}\vec{e'_i} \,. \tag{244}$$

Složením obou otočení získáme

$$\vec{e''_j} = B_{ji}\vec{e'_i} = B_{ji}A_{ik}\vec{e_k} = C_{jk}\vec{e_k} \,, \tag{245}$$

kde matice **C** je definována vztahem

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}.\mathbf{A} \,. \tag{246}$$

Vzhledem k tomu, že násobení matic není obecně komutativní, není obecně komutativní ani skládání otočení tuhého tělesa.

Nyní dokážeme, že vektory úhlové rychlosti se skládají lineárně. Vyjdeme z definice (236) matice $\mathbf{\Omega}$ a pro matici $\mathbf{\Omega}^{C}$ popisující úhlovou rychlost otáčení tuhého tělesa charakterizovanou maticí **C** můžeme psát $\mathbf{\Omega}^{C''} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{C}}{\mathrm{d}t}\mathbf{C}^{T}$. S využitím vztahu (246) dále postupnými úpravami dostáváme $\mathbf{\Omega}^{C''} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{B}.\mathbf{A})}{\mathrm{d}t}.(\mathbf{B}.\mathbf{A})^{T} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}.\mathbf{A} + \mathbf{B}.\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right).\mathbf{A}^{T}.\mathbf{B}^{T} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}.\mathbf{A}.\mathbf{A}^{T}.\mathbf{B}^{T} + \mathbf{B}.\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}.\mathbf{A}^{T}.\mathbf{B}^{T}$. Ze vztahu (228) vyplývá, že $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{T} = \mathbf{E}$, kde **E** je jednotková matice. Proto můžeme dále psát $\mathbf{\Omega}^{C''} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}.\mathbf{B}^{T} + \mathbf{B}.\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}.\mathbf{A}^{T}.\mathbf{B}^{T} = \mathbf{\Omega}^{B''} + \mathbf{B}.\mathbf{\Omega}^{A'}.\mathbf{B}^{T}$. V poslední úpravě jsme využili opět definiční vztah matice $\mathbf{\Omega}^{B''}$ resp. $\mathbf{\Omega}^{A'}$. Uvědomíme-li si, že matice $\mathbf{B}.\mathbf{\Omega}^{A'}.\mathbf{B}^{T}$ popisuje transformaci matice **A** z báze $\{\vec{e'_i}\}$ do báze $\{\vec{e''_i}\}$, můžeme napsat finální vztah ve tvaru

$$\mathbf{\Omega}^{C''} = \mathbf{\Omega}^{B''} + \mathbf{\Omega}^{A''} \,. \tag{247}$$

Čárky v indexech u matic konkretizují, v jaké bázi je příslušná matice definována.

Obecně tedy pro vektory úhlové rychlosti popisující otáčení tuhého tělesa kolem různých os platí

$$\mathbf{\Omega}^{C} = \mathbf{\Omega}^{B} + \mathbf{\Omega}^{A} \,. \tag{248}$$