Eulerovy dynamické rovnice

Eulerovy dynamické rovnice jsou jakousi analogií Newtonových rovnic (rovnice druhého Newtonova zákona) pro tuhé těleso. Jejich odvození vychází ze druhé věty impulsové, kterou lze získat velmi jednoduše z první věty impulsové tvaru $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$ tak, že tuto rovnici vektorově vynásobíme polohovým vektorem $\vec{r}$. Tak dostaneme $\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}$, což lze psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}\,. \tag{285}$$

Vztah (285) je matematickým vyjádřením **druhé věty impulsové**. V tomto vztahu je $\vec{M}$ moment vnějších sil a $\vec{L}$ je moment hybnosti. Vzhledem k tomu, že $\vec{M}$ charakterizuje míru otáčivých účinků vnějších sil na dané tuhé těleso, budeme situaci vyšetřovat z hlediska vnějšího pozorovatele.

Na základě vztahu (241) můžeme tedy pro moment hybnosti psát

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{prostor}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{těleso}} + \vec{\Omega} \times \vec{L}\,, \tag{286}$$

kde moment hybnosti vystupující na pravé straně vztahu je definovaný z hlediska tuhého tělesa.

Změnu momentu hybnosti $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{těleso}}$ tedy naměří dítě, které sedí na rotujícím kolotoči. Změnu momentu hybnosti $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{prostor}}$ naměří rodič dítěte, který stojí vedle rotujícího kolotoče.

Ze vztahů (285) a (286) vyplývá

$$\vec{M} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{těleso}} + \vec{\Omega} \times \vec{L}\,. \tag{287}$$

Přitom moment hybnosti je definován pomocí tenzoru setrvačnosti a vektoru úhlové rychlosti vztahem (270). Vzhledem k tuhému tělesu jsou ovšem složky tenzoru setrvačnosti I konstantní, neboť jsou určeny buď v korotující bázi (ta je vzhledem k danému tuhému tělesu v klidu, protože rotuje spolu s ním) a nebo vzhledem k hlavním osám tuhého tělesa. Pro moment hybnosti definovaný vůči hlavním osám můžeme napsat jednodušší podobu vztahu (270) (analogii vztahu (274)):

$$L_x = I_1\Omega_x\,,\ L_y = I_2\Omega_y \text{ a } L_z = I_3\Omega_z\,. \tag{288}$$

Rozepsáním vektorového součinu ve vztahu (287) a částečným dosazením ze vztahu (288) dostaneme

$$I_1\dot{\Omega}_x + \left(\Omega_y L_z - \Omega_z L_y\right) = M_x \tag{289}$$

Po dalším dosazení ze vztahu (288) získáme **Eulerovy dynamické rovnice**, které popisují rotaci tuhého tělesa z hlediska dynamiky, ve tvaru

$$I_1\dot{\Omega}_x - \left(I_2 - I_3\right)\Omega_y\Omega_z = M_x \tag{290}$$

Tyto rovnice publikoval švýcarský matematik a fyzik Leonhard Paul Euler (1707 - 1783) v roce 1758.

Vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega} = \left(\Omega_x; \Omega_y; \Omega_z\right)$, který vystupuje v Eulerových dynamických rovnicích (290), je popsán pomocí Eulerových úhlů otočení tuhého tělesa a s těmito úhly je svázán Eulerovými kinematickými rovnicemi (257).

Eulerovy dynamické rovnice jsou silně nelineární soustavou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, což je důvod, proč se setrvačníky (jejichž pohyb je těmito rovnicemi popsán) chovají nepředvídatelně. Tyto relativně složité rovnice poskytují relativně složité řešení, které popisuje složitý pohyb tuhých těles. Rovnice jsou sice prvního řádu, ale ve většině úloh jsou vektor úhlové rychlosti a složky tenzoru setrvačnosti vyjádřeny v bázi hlavních os (resp. v korotující bázi tuhého tělesa), zatímco moment sil je vyjádřen z hlediska vnějšího pozorovatele. Proto je velmi komplikovaný přepočet veličin měřených vnějšími pozorovateli do korotující báze - průměty momentů sil do jednotlivých os se mění v čase, neboť z hlediska vnějšího pozorovatele se v čase neustále mění korotující báze resp. báze hlavních os.

Jak vektory korotující báze, tak báze hlavních os jsou pevně spojeny s tělesem a tedy se při pohybu tuhého tělesa (translace i rotace) z hlediska vnějšího pozorovatele mění. Proto je přepočet mezi pohledem „zvenčí“ a pohledem „zevnitř“ poměrně komplikovaný.

Při řešení konkrétní úlohy je tedy nutné vyjádřit celkový moment vnějších sil v korotující bázi tuhého tělesa, tj. pomocí Eulerových úhlů. Poté je nutné dosadit z Eulerových kinematických rovnic do Eulerových dynamických rovnic, čímž se levá strana rovnic (290) stane velmi komplikovaná, neboť bude obsahovat výrazy závisející na Eulerových úhlech φ, ϑ a ψ a jejich časových derivacích $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\vartheta}$ a $\ddot{\psi}$. Získáme tedy velmi silně nelineární soustavu diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé φ, ϑ a ψ.

Pohyb popsaný takovou soustavou rovnic je silně chaotický a výpočetně stejně problematický a náročný jako pohyb tří těles, pohyb dvojkyvadla, … Přesto se ale aplikace této teorie v praxi používají - na principu setrvačníků pracují gyroskopy, kterým stále dávají piloti dopravních letadel přednost před elektronickou navigací (např. systém GPS), používají se i v dalších druzích navigační techniky, … Při konstrukci takových přístrojů se pak používají různé metody, jak Eulerovy dynamické rovnice zjednodušit: speciální závěsy setrvačníků, tvar těles, uložení těles, … To vše vede k tomu, že naroste symetrie daného problému a tedy se zjednoduší popis pohybu daného tělesa: stejné momenty setrvačnosti podél (některých) hlavních os, speciální tvar elipsoidu setrvačnosti (nejlépe sféra), …

Typickou aplikací je tzv. bezsilový setrvačník (bezmomentový setrvačník).
