

Bezmomentový setrvačník

Bezsilový setrvačník je špatný název pro bezmomentový rotačně symetrický setrvačník, který může sloužit např. jako model gyroskopu uloženého v tzv. [Cardanově](#) závěsu. Dalším velmi dobrým modelem tohoto typu setrvačnicku je [Země](#).

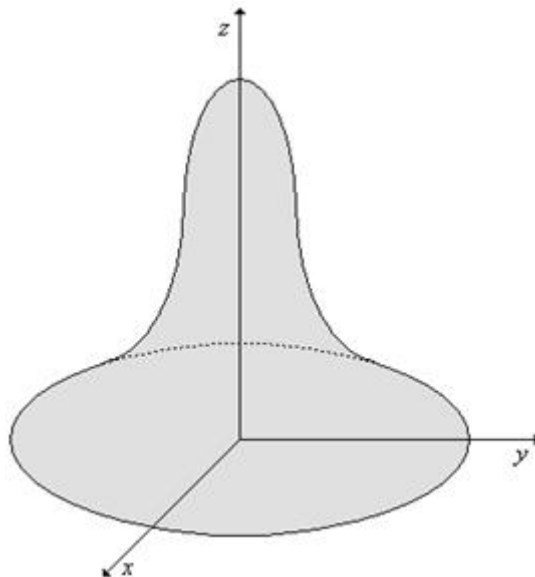
Tento setrvačník je charakterizován nulovým [momentem sil](#) (tj. $\vec{M} = \vec{0}$) a rotační symetrií, ze které pro [momenty setrvačnosti](#) vzhledem k [hlavním osám](#) vyplývá $I_1 = I_2 \neq I_3$. Takový setrvačník si lze představit podobně jako těleso na obr. 69.

[Eulerovy dynamické rovnice](#) (290) se tedy zjednoduší na tvar

$$I_1 \dot{\Omega}_x = (I_1 - I_3) \Omega_y \Omega_x \quad (291)$$

Z poslední z Eulerových rovnic (291) dostáváme $\Omega_x = \text{konst.}$ a tuto konstantu označíme ω_0^x , takže máme

$$\Omega_x = \omega_0^x = \text{konst.} \quad (292)$$



Obr. 69

Z první z rovnic (291) můžeme vyjádřit $\dot{\Omega}_x = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0^x \Omega_y$ a ze druhé $\dot{\Omega}_y = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_0^x \Omega_x$. Označíme-li

$$\omega_0 = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0^x, \quad (293)$$

můžeme psát

$$\dot{\Omega}_x = \omega_0 \Omega_y \text{ a } \dot{\Omega}_y = -\omega_0 \Omega_x. \quad (294)$$

Derivujeme-li nyní první z rovnic (294) podle času, dostaneme $\ddot{\Omega}_x = \omega_0 \dot{\Omega}_y$ a po dosazení ze druhé dostaneme rovnici $\ddot{\Omega}_x = -\omega_0^2 \Omega_x$ neboli

$$\ddot{\Omega}_x + \omega_0^2 \Omega_x = 0, \quad (295)$$

což je rovnice popisující [pohyb harmonického oscilátoru](#). Proto můžeme její řešení psát ve tvaru

$$\Omega_x(t) = A \sin(\omega_0 t + \delta), \quad (296)$$

kde A je amplituda [kmitání harmonického pohybu](#) a δ je [počáteční fáze](#) kmitání harmonického oscilátoru. Z hlediska řešení soustavy rovnic (291) to jsou integrační konstanty. Po úpravě první z rovnic (294) a následném dosazení řešení (296) získáme $\dot{\Omega}_y = \frac{1}{\omega_0} \dot{\Omega}_x = \frac{1}{\omega_0} \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \delta)$. Dostáváme tedy

$$\Omega_y(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta). \quad (297)$$

S využitím částečných řešení (292), (296) a (297) dostáváme pro vektor [úhlové rychlosti](#) $\vec{\Omega}$ v závislosti na čase

$$\vec{\Omega}(t) = \{A \sin(\omega_0 t + \delta); A \cos(\omega_0 t + \delta); \omega_0^2\}. \quad (298)$$

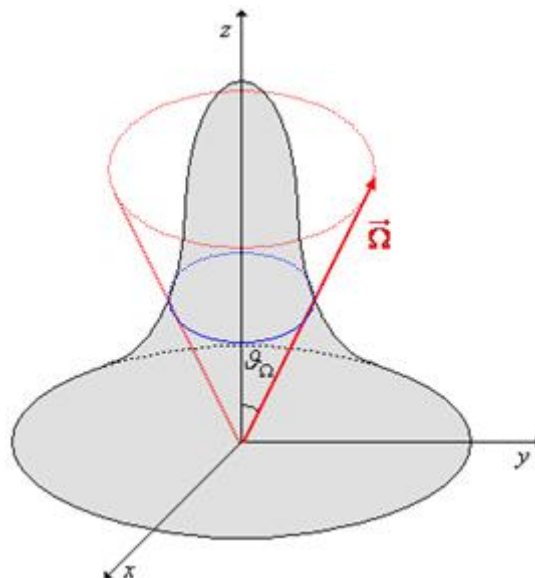
Vektor $\vec{\Omega}$ je tedy vyjádřen v [bázi](#) hlavních os a pro jeho velikost platí $|\vec{\Omega}(t)| = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}$. Po dosazení ze vztahu (298) tedy dostaneme

$$|\vec{\Omega}(t)| = \sqrt{A^2 + (\omega_0^2)^2} = \text{konst.} \quad (299)$$

Uvědomíme-li si platnost vztahu (292) je zřejmé, že vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$ zapsaný ve tvaru (298) opisuje plášť rotačního kužele (viz obr. 70) s úhlovou [frekvencí](#) ω_0 . To znamená, že [nutační úhel](#) φ_Ω , který svírá vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$ s osou z , je konstantní a platí

$$\text{tg } \varphi_\Omega = \frac{\sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2}}{\Omega_z} = \frac{A}{\omega_0^2}. \quad (300)$$

Na obr. 70 je také znázorněna [kružnice](#), ve které protíná rotující vektor $\vec{\Omega}$ dané [tuhé těleso](#).



Obr. 70

Skutečnost, že vektor $\vec{\Omega}$ opisuje plášť kužele, vyplývá z toho, že velikost tohoto vektoru je v čase konstantní, z-ová složka je konstantní a dále z toho, že x-ová a y-ová složka vektoru $\vec{\Omega}$ opisují kružnici; vztahy (296) a (297) jsou totiž parametrické rovnice kružnice vyjádřené v polárních [souřadnicích](#).

Ještě je nutné dopočítat [Eulerovy úhly](#) φ , ϑ a ψ pomocí [Eulerových kinematických rovnic](#) (257). Dosazením do těchto rovnic získáme pro náš vyšetřovaný případ soustavu rovnic

$$\dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi = A \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (301)$$

Vzhledem k tomu, že koncový bod vektoru \vec{r} opisuje kružnici, je nutační úhel ϑ konstantní, tedy $\dot{\vartheta} = \vartheta_0$. Proto můžeme Eulerovy kinematické rovnice (301) psát v jednodušším tvaru:

$$\dot{\varphi} \sin \vartheta_0 \sin \psi = A \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (302)$$

Je-li totiž $\vartheta = \vartheta_0 = \text{konst.}$, pak je časová změna tohoto úhlu nulová, tj. $\dot{\vartheta} = 0$.

Řešení soustavy rovnic (302) nalezneme postupnými kroky. Nejdříve umocníme první dvě rovnice soustavy na druhou a sečteme je. Dostaneme rovnici $(\dot{\varphi} \sin \vartheta_0)^2 (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) = A^2 (\sin^2(\omega_0 t + \delta) + \cos^2(\omega_0 t + \delta))$, po jejíž úpravě získáme tvar $(\dot{\varphi} \sin \vartheta_0)^2 = A^2$. Odmocněním přejde rovnice na tvar

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{\sin \vartheta_0}, \quad (303)$$

odkud vyplývá

$$\varphi = \frac{A}{\sin \vartheta_0} t + \varphi_0. \quad (304)$$

Ve vztahu (303) je na jeho pravé straně konstanta, proto je integrace podle proměnné t jednoduchá.

Vydělením prvních dvou rovnic soustavy (302) získáme rovnici $\frac{\dot{\varphi} \sin \vartheta_0 \sin \psi}{\dot{\varphi} \sin \vartheta_0 \cos \psi} = \frac{A \sin(\omega_0 t + \delta)}{A \cos(\omega_0 t + \delta)}$, která po úpravě přejde na tvar $\frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{\sin(\omega_0 t + \delta)}{\cos(\omega_0 t + \delta)}$. Dostáváme tedy rovnici

$$\text{tg } \psi = \text{tg}(\omega_0 t + \delta). \quad (305)$$

Derivací rovnice (305) podle času získáme rovnici $\frac{1}{\cos^2 \psi} \dot{\psi} = \frac{1}{\cos^2(\omega_0 t + \delta)} \omega_0$, odkud můžeme vyjádřit

$$\dot{\psi} = \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2(\omega_0 t + \delta)} \omega_0. \quad (306)$$

Ze druhé rovnice soustavy (302) můžeme vyjádřit

$$\cos \psi = \frac{A \cos(\omega_0 t + \delta)}{\dot{\varphi} \sin \vartheta_0}. \quad (307)$$

Nyní můžeme do vztahu (306) dosadit ze vztahu (307), čímž získáme rovnici $\dot{\psi} = \frac{A^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta)}{\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta_0} \frac{1}{\cos^2(\omega_0 t + \delta)} \omega_0$. Do jejího upraveného tvaru $\dot{\psi} = \frac{A^2}{\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta_0} \omega_0$ dosadíme ze vztahu (303) a získáme

$$\dot{\psi} = \omega_0. \quad (308)$$

Odtud již snadno určíme

$$\psi = \omega_0 t + \delta. \quad (309)$$

Dosazením vztahů (303) a (308) do třetí rovnice soustavy (302) dostaneme $\omega_0 + \frac{A}{\sin \vartheta_0} \cos \vartheta_0 = \omega_0^x$.

Postupnými úpravami získáme rovnici ve tvaru $\frac{A}{\operatorname{tg} \vartheta_0} = \omega_0^x - \omega_0$, a tedy můžeme psát $\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{A}{\omega_0^x - \omega_0}$.

S využitím vztahu (293) dostáváme rovnici ve tvaru $\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{A}{\omega_0^x - \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0^x} = \frac{I_1 A}{I_1 \omega_0^x - I_1 \omega_0^x + I_3 \omega_0^x}$, takže máme

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{I_1 A}{I_3 \omega_0^x}. \quad (310)$$

Získali jsme tedy řešení Eulerových kinematických rovnic ve tvaru

$$\vartheta = \vartheta_0, \text{ přičemž } \operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{I_1 A}{I_3 \omega_0^x}, \varphi = \frac{A}{\sin \vartheta_0} t + \varphi_0 \text{ a } \psi = \omega_0 t + \delta. \quad (311)$$

Při hledání řešení soustavy rovnic (302) byly prováděny operace, které z hlediska matematiky vyžadují komentáře a diskusi jejich platnosti (při dělení není možné dělit nulou, ...). Z fyzikálního hlediska ovšem hodnoty goniometrických funkcí nemohou být nulové, tj. jejich argumenty nemohou z fyzikálních důvodů mít hodnoty 0 nebo $\frac{\pi}{2}$. Proto jsou všechny provedené úpravy v tomto případě korektní.

U bezmomentového setrvačnicku tedy nastává tzv. **regulární precese** (pravidelná [precese](#)), při níž se poloha [osy otáčení](#) (tj. směr vektoru $\vec{\omega}$) mění v čase pravidelně (koncový bod vektoru opisuje kružnici). V případě [rotace](#) Země je tato precese důsledkem pohybů během počátečního vývoje [Sluneční soustavy](#), dopadem [meteoroidů](#) na Zem, ... Ve skutečnosti ovšem právě popisovaná precese není takto pravidelná, neboť na Zemi působí svou [gravitační silou Měsíc](#), působí na ní i [Slunce](#), sama Země není dokonale symetrické těleso ani to není ideálně tuhé těleso, ... Proto vznikají nepřesnosti v tomto precesním pohybu, které mají [periodu](#) 427 dní, a zemská osa tedy neprotíná Zemi v jednom bodě ([severní pól](#)), ale opisuje kolem severního pólu kružnici o poloměru asi 4 m.

Tato kružnice je analogická kružnici, která je na obr. 70 znázorněna modrou křivkou.

Právě určený směr úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ (tj. směr osy rotace) byl určen vzhledem k tělesu (vzhledem k Zemi, vzhledem ke [korotující bázi](#)). Určit směr vektoru $\vec{\omega}$ vzhledem k [pevné bázi](#) (vzhledem ke stálícím, vzhledem k systému [GPS](#), ...) není jednoduché. Pro určení pohybu vektoru $\vec{\omega}$ vzhledem k pevné bázi je nutné určit jeden vybraný směr. Tímto vybraným směrem může být např. směr vektoru momentu [hybnosti](#) \vec{L} . Moment hybnosti je totiž [veličina](#), která se v [izolované soustavě](#) zachovává.

Bezmomentový setrvačnick takovou izolovanou soustavou je. Ostatně ze vztahu (285) pro bezmomentový setrvačnick plyne $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ a tedy $\vec{L} = \text{konst.}$

S využitím vztahů (288), (292), (296) a (297) můžeme pro složky momentu hybnosti \vec{L} psát:

$$L_x = I_1 \Omega_x = I_1 A \sin(\omega_0 t + \delta), \quad L_y = I_2 \Omega_y = I_1 A \cos(\omega_0 t + \delta) \quad \text{a} \quad L_z = I_3 \Omega_z = I_3 \omega_0^x \quad (312)$$

a pro jeho velikost dostáváme $|\vec{L}(t)| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$. Po dosazení ze vztahů (312) pak máme

$$|\vec{L}(t)| = \sqrt{I_1^2 A^2 + I_3^2 (\omega_0^x)^2} = \text{konst.} \quad (313)$$

Vektor momentu hybnosti \vec{L} tedy opisuje také plášť kužele, ale obecně jiný, než opisuje vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}$. Oba ale opisují kužely se stejnou úhlovou frekvencí ω_0 . Vektor momentu hybnosti \vec{L} přitom svírá s osou z stálý úhel φ_L , pro který platí

$$\text{tg } \varphi_L = \frac{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}{L_z} = \frac{I_1 A}{I_3 \omega_0^x} = \frac{I_1}{I_3} \text{tg } \varphi_{\vec{\omega}}. \quad (314)$$

Úhel φ_L má přitom stejnou hodnotu jako úhel φ_0 z řešení (311).

Na základě nalezeného řešení (298) pro vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ a řešení (312) pro vektor momentu hybnosti \vec{L} lze psát

$$\vec{L} = I_1 \vec{\omega} + (I_3 - I_1) \omega_x \vec{e}_x, \quad (315)$$

což znamená, že v každém okamžiku vektory $\vec{\omega}$ a \vec{L} a osa z leží v jedné rovině.

Na vztah (315) lze nahlížet jako na parametrické vyjádření roviny, která je dána vektory $\vec{\omega}$ a \vec{e}_x .

Z hlediska pevné báze (tj. vzhledem ke stálíci, systému GPS, ...) má stálý směr v prostoru vektor momentu hybnosti \vec{L} a setrvačnick (Země) rotuje kolem něj.

Kolem vektoru \vec{L} tedy rotuje osa z a kolem ní vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}$.

Situaci lze znázornit pomocí dvou kuželů, které se kolem sebe valí. Přímka, která je okamžitou dotýčnicí obou kuželů, určuje směr vektoru úhlové rychlosti $\vec{\omega}$. Oba kužely přitom popisují precesi vektoru úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ - jeden kužel znázorňuje její precesi kolem vektoru momentu hybnosti \vec{L} , druhý kužel pak precesi kolem osy z daného kartézského systému.

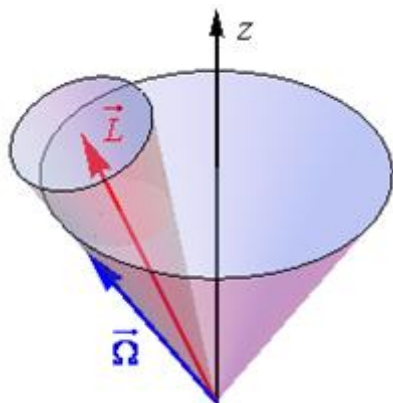
V závislosti na vzájemné hodnotě momentů setrvačnosti I_1 a I_3 uvažovaného tělesa mohou nastat dva případy:

1. $I_1 < I_3$ - ze vztahu (314) a z toho, že funkce tangens je rostoucí, vyplývá, že $\varphi_L < \varphi_0$ a kužel spojený s momentem hybnosti \vec{L} se valí uvnitř kužele spojeného s osou z daného kartézského systému (viz obr. 71).
2. $I_1 > I_3$ - ze vztahu (314) a z toho, že funkce tangens je rostoucí, vyplývá, že $\varphi_L > \varphi_0$ a kužel spojený s momentem hybnosti \vec{L} se valí vně kužele spojeného s osou z daného kartézského systému (viz obr. 72).

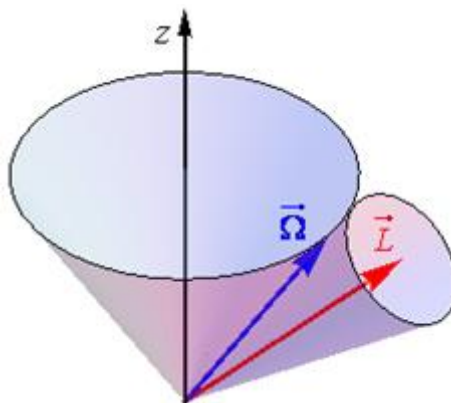
Vektory na obr. 71 a obr. 72 by měly být správně otočeny tak, aby vektor momentu hybnosti \vec{L} měl svislý směr. Bylo by tím lépe naznačeno, že je to právě tento vektor, jehož směr se v prostoru zachovává!

Pro nesymetrický setrvačnick je řešení jeho pohybu komplikovanější. Navíc se nezachovává ani směr ani velikost úhlové rychlosti $\vec{\omega}$.

U symetrického se zachovává velikost vektoru úhlové rychlosti $\vec{\omega}$.



Obr. 71



Obr. 72

© Encyklopedie Fyziky (<http://fyzika.jreichl.com>); Jaroslav Reichl, Martin Všeticka

Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.