# Booleova algebra

Tento druh algebry zavedl v 19. století anglický matematik George Boole (1815 - 1864). Zpočátku se jednalo pouze o zjednodušení zápisu matematických vět a jejich důkazů a o metodu, jak zpřehlednit práci s logickými výroky. V roce 1937 obhájil diplomovou práci mladý americký budoucí inženýr Claude Elwood Shannon (1916 - 2001) a v ní ukázal, jak Booleovu algebru použít k popisu a konstrukci složitých sítí přepínačů (elektromagnetických relé).

Booleovu algebru lze chápat jako nauku o operacích na množině obsahující dvě logické konstanty 0 a 1 a dále logické proměnné, které se označují malými písmeny (např. *a*, *b*, *c*, *x*, *y*, *z*, $x_0$, $x_1$, $x_2$, ...). Booleova algebra používá tento základní soubor operací:

1. logický součin - běžně se označuje operátorem $\wedge$ (*a*, *a zároveň*, AND), v technické praxi se označuje tečkou resp. vynecháním tečky;
2. logický součet - běžně se označuje operátorem $\vee$ (*nebo*, OR), v praxi se běžně používá symbol +;
3. negace - značí se buď symbolem ¬ před operandem a nebo vodorovnou čárkou nad operandem.

Vzhledem k tomu, že logická proměnná může nabývat pouze dvou hodnot 0 a 1, není Booleova algebra algebrou čísel, ale **algebrou stavů**. Logické funkce se velmi často pro přehlednost zapisují pomocí pravdivostní tabulky. Pro *n* proměnných, z nichž každá může nabývat dvou stavů, dostáváme celkem $k = 2^n$ kombinací. Pro *n* proměnných tedy existuje celkem $2^k$ funkcí.

Pro dvě proměnné tedy dostáváme celkem $2^4 = 16$ funkcí (viz tab. 4).

| $a$ | $b$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | $f_{13}$ | $f_{14}$ | $f_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

*tab. 4*

Řada funkcí, které jsou definovány v tab. 4, se běžně nepoužívá. Některé z nich ale mají natolik zajímavé vlastnosti, že se označují speciálními symboly:

1. $f_0$, $f_{15}$ - identické funkce (tzv. triviální identity): $f_0$ identicky rovna 0, $f_{15}$ identicky rovna 1 pro všechny hodnoty vstupních proměnných;
2. $f_1$ - funkce AND;
3. $f_7$ - funkce OR (slučovací *nebo*);
4. $f_{14} = \overline{f_1}$ - funkce NAND (negace AND);
5. $f_8 = \overline{f_7}$ - funkce NOR (negace OR);
6. $f_6$ - funkce XOR (vylučovací *nebo*);

Rozdíl mezi významem OR a XOR pochopíme asi nejlépe na příkladu z praxe. Ve větě „Mléko se prodává v papírových krabicích nebo v plastových láhvích.“ je *nebo* použito ve významu OR - slučovací *nebo*. Mléko se totiž může prodávat „v krabicích *a taky* v láhvích“.

Ve větě „Dneska večer půjdu do kina nebo do divadla.“ je *nebo* použito ve smyslu XOR - vylučovací *nebo*. Navštívím jen jedno představení - „*buď* kino *a nebo* divadlo“ (ale ne obě najednou).

7. $f_9 = \overline{f_6}$ - funkce ekvivalence;
8. $f_{13}$ - funkce implikace $a \Rightarrow b$ (ta se ovšem v digitální technice nepoužívá).

Pro tři proměnné *a*, *b* a *c* platí v Booleově algebře zákony, které jsou vypsány v tab. 5.

| | **Logický součin** | **Logický součet** |
|---|---|---|
| Komutativní zákony | $a.b = b.a$ | $a+b = b+a$ |
| Asociativní zákony | $a.(b.c) = (a.b).c$ | $a+(b+c) = (a+b)+c$ |
| Distributivní zákony | $a+(b.c) = (a+b).(a+c)$ | $a.(b+c) = a.b+a.c$ |
| Zákony vyloučeného třetího | $a.\bar{a} = 0$ | $a+\bar{a} = 1$ |
| Zákony neutrality | $a.1 = a$ | $a+0 = a$ |
| Zákony agresivity | $a.0 = 0$ | $a+1 = 1$ |
| Zákony o idempotenci prvků | $a.a = a$ | $a+a = a$ |
| De Morganovy zákony | $\overline{x.y} = \bar{x}+\bar{y}$ | $\overline{x+y} = \bar{x}.\bar{y}$ |
| Zákon dvojité negace | $\bar{\bar{a}} = a$ | |
| Princip duality | $ab = c \Leftrightarrow \bar{a}+\bar{b} = \bar{c}$ | $a+b = c \Leftrightarrow \bar{a}\bar{b} = \bar{c}$ |

*tab. 5*

Pozor na distributivní zákon pro logický součin (tj. na výraz $a+(b.c) = (a+b).(a+c)$ ) - ten v algebře reálných čísel neexistuje!

Jak logické funkce (např. z funkce z tab. 4), tak i platnost zákonů Booleovy algebry (sepsaných v tab. 5) lze rozšířit na více proměnných.

Např. $a \wedge b \wedge c$ lze na základě asociativního zákona psát ve tvaru $(a \wedge b) \wedge c$, ve kterém jsou oba logické součty ($\wedge$) aplikovány vždy na dvě proměnné. Po aplikaci prvního logického součtu máme $d = a \wedge b$ a následně provedeme logický součet $d \wedge c$.