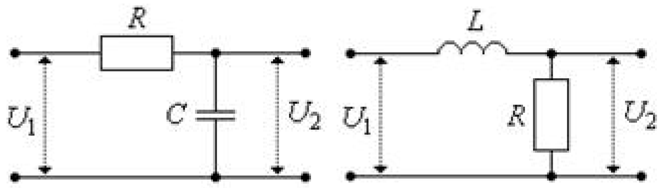
Integrační článek

Integrační článek, který může být zapojen podle dvou schémat (viz obr. 190 a obr. 191), je elektrotechnická součástka, která realizuje v obvodu matematickou funkci integrál. To znamená, že průběh výstupního napětí odpovídá primitivní funkci (integrálu) vstupního napětí v závislosti na čase.



Obr. 190 Obr. 191

Srovnáme-li první schéma integračního článku (obr. 190) s prvním schématem derivačního článku (viz obr. 188) a druhé schéma integračního článku (viz obr. 191) s druhým schématem derivačního článku (viz obr. 189), zjistíme, že u obou dvojic článků jsou pouze navzájem vyměněné součástky připojené ke vstupním svorkám a výstupním svorkám (v první dvojici kondenzátor s rezistorem, ve druhé dvojici cívka s rezistorem).

V dalším odvození budeme předpokládat stejně jako u derivačního článku ideální zdroj napětí U_1 (vstupní napětí) a výstup článku naprázdno, tj. článek s nepřipojenou zátěží.

Výstup článku je tedy rozpojen - mezi svorkami, z nichž odebíráme výstupní napětí, tak je teoreticky nekonečně velký odpor. V praxi bychom mohli klidně k výstupním svorkám připojit voltmetr a stále bychom mohli považovat článek za nezatížený - voltmetr je totiž charakterizován velmi velkým vnitřním odporem.

Kvalitu přenosu signálu integračním článkem vyjádříme pomocí tzv. **napěťového přenosu integračního článku** A_1 ($[A_1]=1$), tj. poměru výstupního napětí $\mathbf{U}_2$ a vstupního napětí $\mathbf{U}_1$.

Tato veličina je naprosto stejná jako u derivačního článku.

Nejdříve popíšeme integrační článek, jehož schéma je zobrazeno na obr. 190. Napětí $\mathbf{U}_1$, které měříme vlastně na sériové kombinaci rezistoru o odporu *R* a kondenzátoru o kapacitě *C*, dostáváme: $\mathbf{U}_1 = (R+X_C)\mathbf{I} = \left(R+\frac{1}{\omega C\cdot \mathrm{j}}\right)\mathbf{I}$, kde ω je úhlová frekvence procházejícího elektrického proudu a *j* je imaginární jednotka, pro níž platí $j^2=-1$.

Zápis fyzikálních veličin pomocí tučného fontu pouze naznačuje, že se nejedná přímo o hodnoty elektrického napětí a elektrického proudu, ale o fázory, ve kterých je zápisem pomocí komplexních čísel zohledněn i vzájemný fázový posun.

Pro napětí $\mathbf{U}_2$ na výstupu článku (tj. na kondenzátoru s kapacitou *C*) dostáváme: $\mathbf{U}_2 = X_C\cdot\mathbf{I} = \frac{1}{\omega C\cdot \mathrm{j}}\cdot\mathbf{I}$.

Elektrický proud procházející článkem je stejný na vstupu i na výstupu - daným zapojením článku se mění (vlivem různé vstupní impedance a výstupní impedance článku) pouze napětí.

Pro napěťový přenos článku A_1 tedy můžeme psát: $A_1 = \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{U}_1} = \frac{\frac{1}{\omega C\cdot \mathrm{j}}\cdot\mathbf{I}}{\left(R+\frac{1}{\omega C\cdot \mathrm{j}}\right)\mathbf{I}} = \frac{\frac{1}{\omega C\cdot \mathrm{j}}}{\frac{\omega CR\cdot \mathrm{j}+1}{\omega C\cdot \mathrm{j}}} = \frac{1}{1+\omega CR\cdot \mathrm{j}}$.

Pro integrační článek, jehož schéma je zobrazeno na obr. 191, budeme postupovat velmi podobně. Vstupní napětí $\mathbf{U}_1$ je napětí na sériové kombinaci rezistoru o odporu *R* a cívky s indukčností *L* a můžeme pro něj tedy psát: $\mathbf{U}_1 = (R + X_L)\,\mathbf{I} = (R + \omega L \cdot \mathrm{j})\,\mathbf{I}$. Pro výstupní napětí $\mathbf{U}_2$ (napětí na rezistoru) platí: $\mathbf{U}_2 = R \cdot \mathbf{I}$.

Pro napěťový přenos článku A_2 proto dostáváme:

$$A_1 = \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{U}_1} = \frac{R \cdot \mathbf{I}}{(R + \omega L \cdot \mathrm{j})\,\mathbf{I}} = \frac{R}{R + \omega L \cdot \mathrm{j}} = \frac{R}{R\left(1 + \omega \frac{L}{R} \cdot \mathrm{j}\right)} = \frac{1}{1 + \omega \frac{L}{R} \cdot \mathrm{j}}.$$

Je zřejmé, že vztahy pro veličiny A_1 a A_2 jsou formálně velmi podobné, a proto je dále můžeme vyšetřovat oba najednou. Z obou vztahů pro veličiny A_1 a A_2 vyplývá, že jednotky součinu $C \cdot R$ i podílu $\frac{L}{R}$ jsou stejné jako jednotka času, tj. sekunda.

Vzhledem k tomu, že $[A_1] = [A_2] = 1$, musí mít čitatel i jmenovatel zlomku stejnou jednotku. Čitatelé obou vztahů jsou konstanty bez jednotky. Jmenovatelé musí být tedy také bez jednotky; navíc jsou jmenovatelé tvořeny součtem čísla a určitého výrazu. Proto musí platit $[\omega C \cdot R] = \left[\omega \frac{L}{R}\right] = 1$. Odtud je zřejmé, že $[C \cdot R] = \left[\frac{L}{R}\right] = \mathrm{s}$, neboť $[\omega] = \mathrm{s}^{-1}$.

Můžeme tedy (stejně jako u derivačního článku) definovat tzv. **časovou konstantu** τ vztahem $\tau = C \cdot R$ resp. $\tau = \frac{L}{R}$. Nyní můžeme oba napěťové přenosy A_1 a A_2 přepsat ve shodném tvaru $A = A_2 = A_1 = \frac{1}{1 + \omega \cdot \tau \cdot \mathrm{j}}$. Pokud si uvědomíme vztah mezi úhlovou frekvencí a frekvencí *f*, můžeme psát $A = \frac{1}{1 + 2\pi \cdot f \cdot \tau \cdot \mathrm{j}}$. Dále můžeme definovat mezní frekvenci f_m vztahem $f_m = \frac{1}{2\pi \cdot \tau}$ a s jejím využitím přepsat vztah pro veličinu *A* ve tvaru: $A = \dfrac{1}{1 + \frac{f}{f_m}\,\mathrm{j}}$.

Vzhledem k tomu, že vztahy pro napěťový přenos obou článků jsou stejné, je zřejmé, že oba články ovlivňují procházející signál stejným způsobem. Oba články tedy mají stejné přenosové vlastnosti (stejnou přenosovou charakteristiku).

Rovnici jejich **útlumové charakteristiky** získáme tak, že vyjádříme absolutní hodnotu napěťového přenosu článku.

Přenos článku je vyjádřen podílem reálného čísla a komplexního čísla. Proto absolutní hodnotu tohoto podílu můžeme psát jako podíl absolutních hodnot čitatele a jmenovatele daného zlomku.

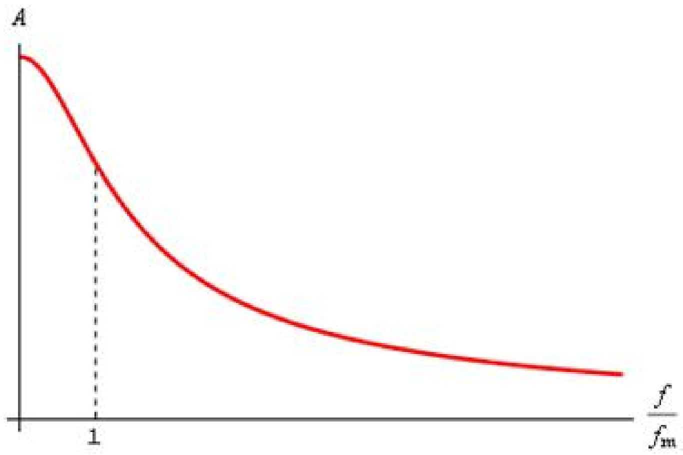
Pro absolutní hodnotu napěťového přenosu článku tedy dostáváme: $|A| = \dfrac{|1|}{\left|1 + \frac{f}{f_m}\,\mathrm{j}\right|}$. S využitím definice absolutní hodnoty komplexního čísla můžeme dále psát: $|A| = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}}$. Graf této útlumové charakteristiky je zobrazen na obr. 192. Rovnici této charakteristiky je možné vyjádřit též pomocí logaritmické funkce. Pro **logaritmickou amplitudovou frekvenční charakteristiku** *a* tedy můžeme psát: $a = 20 \log \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}}$. Tento vztah je možné dále upravit s využitím vlastností logaritmické funkce do tvaru $a = 20\log 1 - 20\log\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_{\mathrm{m}}}\right)^2} = -10\log\left(1+\left(\frac{f}{f_{\mathrm{m}}}\right)^2\right)$, přičemž $[a] = \mathrm{dB}$ (decibel). Graf této funkce je zobrazen na obr. 193. Na vodorovné ose tohoto grafu jsou hodnoty vynášené v logaritmické škále. Na tomto obrázku je též zobrazena tečna ke grafu vykreslené závislosti pro velké frekvence, jejíž směrnice má hodnotu 20 decibelů na dekádu nebo též 6 decibelů na oktávu.

Vzhledem k tomu, že vyšetřujeme závislost na frekvenci, má dobrý význam hovořit o oktávě. Oktáva je přitom takový interval frekvencí, jehož krajní hodnoty frekvencí jsou vůči sobě poloviční resp. dvojnásobné.

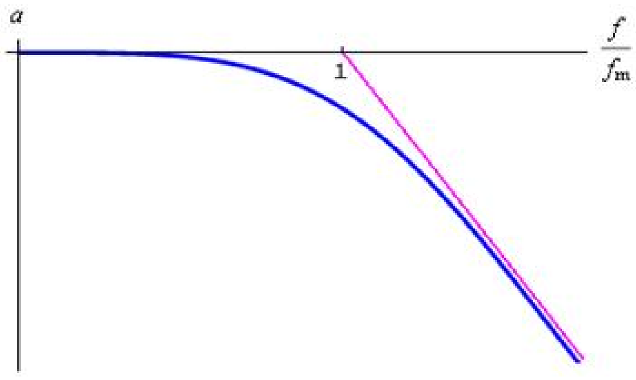
Takže např. hudební tóny s frekvencemi 440 Hz a 880 Hz tvoří oktávu.

Charakteristiku *a* můžeme pro velké hodnoty podílu $\frac{f}{f_{\mathrm{m}}}$ psát v přibližném tvaru $a = -10\log\left(1+\left(\frac{f}{f_{\mathrm{m}}}\right)^2\right) \doteq -10\log\left(\frac{f}{f_{\mathrm{m}}}\right)^2 = -20\log\left(\frac{f}{f_{\mathrm{m}}}\right)$, protože konstanta 1 je vzhledem ke druhé mocnině podílu frekvencí zanedbatelná. Odtud je zřejmé, že směrnice tečny pro velké hodnoty podílu $\frac{f}{f_{\mathrm{m}}}$ je skutečně 20 dB na dekádu.

Vysvětlení souvislosti decibelů na dekádu s decibely na oktávu je uvedeno u derivačního článku.



Obr. 192



Obr. 193

Z uvedených charakteristik je tedy zřejmé, že integrační článek má charakter dolní propusti. Propustí tedy pouze signály takové frekvence, jejichž hodnota je nižší než určitá mezní frekvence daného článku. A tato mezní frekvence závisí na parametrech *R*, *L* a *C* daného článku.

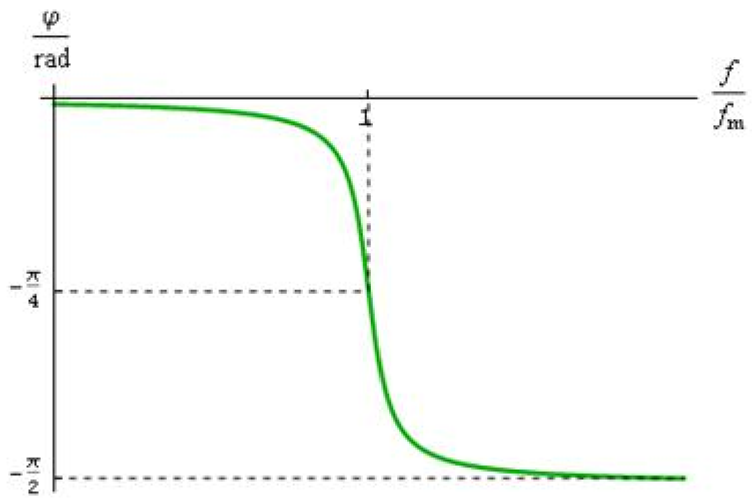
Při malých frekvencích má kondenzátor v RC článku velkou kapacitanci (kapacitní reaktanci), a proto je na něm soustředěno velké napětí. Vzhledem k tomu, že je kondenzátor zapojen na výstupu článku, znamená to, že se vstupní napětí zesiluje. Článek tedy procházející signál propouští. S rostoucí frekvencí se kapacitance kondenzátoru snižuje a tedy se snižuje i hodnota výstupního napětí článku (tj. napětí na kondenzátoru). Článek tedy výrazně snižuje vstupní napětí, a proto můžeme říci, že elektrické napětí vyšších frekvencí článkem neprochází.

A to je ve shodě s tím, že článek funguje jako dolní propust, tj. propouští signály nižších frekvencí.

LR článek pracuje podobným způsobem. Při malých frekvencích je iduktance (induktivní reaktance) cívky na vstupu článku velmi malá a článkem tedy prochází velký elektrický proud. Proto je na rezistoru na výstupu článku relativně velké napětí. Elektrický signál tedy článkem prochází. S rostoucí frekvencí roste induktance cívky a tedy klesá hodnota elektrického proudu tekoucího článkem. V důsledku toho klesá i výstupní napětí článku (to je napětí měřené na rezistoru). V tomto případě tedy článek zeslabuje vstupní napětí a signál jím tak neprochází. I tento typ integračního článku tedy dobře propouští signály nižších frekvencí.

O odporu rezistoru v závislosti na frekvenci procházejícího elektrického signálu jsme nemluvili - jeho hodnota se totiž v závislosti na frekvenci nemění!

Poslední charakteristikou integračního článku je tzv. **fázová charakteristika**. Budeme tedy muset najít závislost fáze φ procházejícího signálu na frekvenci. Tato fáze je určena argumentem komplexního čísla, kterým je popsán napěťový přenos článku *A*. Argument komplexního čísla je přitom dán vztahem $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}(A)}{\operatorname{Re}(A)}$, kde Im(*A*) značí imaginární část komplexního čísla *A* a Re(*A*) značí jeho reálnou část. V tomto případě platí: $\varphi = -\operatorname{arctg}\left(\frac{f}{f_m}\right)$. Fázová charakteristika derivačního článku je zobrazená v grafu na obr. 194.

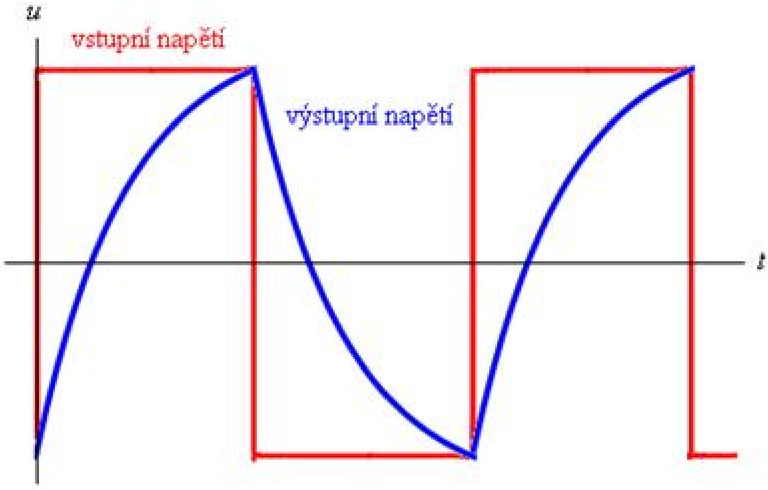


Obr. 194

Časový průběhu vstupního napětí a časový průběh výstupního napětí integračního článku je zobrazen na obr. 195. Parametry výstupního napětí (křivost křivky, ...) se mohou měnit, ale principiálně se bude vždy jednat o exponenciální pokles, který bude závislý na úhlové frekvenci ω charakteristické pro tento článek.

Během trvání čela obdélníkového impulsu se začíná kondenzátor nabíjet a napětí na něm exponenciálně roste až do okamžiku, kdy je kondenzátor nabitý. Právě popsaný exponenciální růst napětí na kondenzátoru tvoří náběžnou hranu impulsu výstupního napětí. Při změně polarity vstupního napětí (resp. při jeho poklesu na nulovou hodnotu) se nabitý kondenzátor vybíjí přes rezistor a vnitřní impedance funkčních bloků. Vybíjení kondenzátoru se projeví exponenciálním poklesem napětí výstupního signálu. V závislosti na střídě vstupního signálu lze pomocí hodnot odporu rezistoru *R* a kapacity kondenzátoru *C* určit efekt integrace článku.

V případě integračního článku, ve kterém je místo kondenzátoru cívka s indukčností *L*, odpovídá čelo vstupního impulsu nárůstu magnetického indukčního toku v cívce a následná změna polarity vstupního napětí pak odpovídá situaci, kdy začíná cívkou procházet indukovaný proud ve shodě s Faradayovým zákonem elektromagnetické indukce a Lenzovým zákonem.



Obr. 195

S rostoucí kapacitou kondenzátoru se začínají zaoblovat náběžné hrany a sestupné hrany obdélníkového impulsu. Původně obdélníkový impuls se začíná více podobat pilovitému průběhu napětí a následně trojúhelníkovému průběhu napětí. Další zvyšování kapacity kondenzátoru pak vede k situaci, kdy se kondenzátor již nestihá nabíjet a vybíjet, čímž se snižuje u trojúhelníkového průběhu rozdíl mezi maximy a minimy tohoto průběhu.

V elektronice se občas integračního efektu RC článku používá záměrně. Výhodou integračního článku je harmonická změna výstupního signálu po dobu trvání čela impulsu. Při určitém poměru parametrů *R* a *C* článku a frekvence vstupního napětí bude původně exponenciální průběh výstupního napětí přibližně lineární. Výstupní signál má potom trojúhelníkový průběh a integrační článek lze považovat za zdroj trojúhelníkového průběhu napětí.