Archimédův číselný systém a počítání písku

Traktát *Počítání písku* (*Psammites*) věnoval Archimédes Gelonovi, spoluvládci Hierona, a chtěl mu ukázat, že matematika dokáže vyjádřit a pojmenovat libovolně velké číslo. Zápis čísel v té době (nepoužívali poziční desítkovou soustavu) byl velmi komplikovaný. Nicméně se Archimédovi podařilo slovně vyjádřit číslo, které v současném zápise má 80 tisíc bilionů nul. Ačkoliv on sám měl z takových čísel radost, byla tato čísla v praxi neupotřebitelná - nebylo dostatečné množství předmětů, které by se jimi daly spočítat. Proto se rozhodl spočítat, kolik zrn jemného písku ze syrakuských pláží by zaplnilo celý vesmír.

Archimédův číselný systém začíná jeho autor budovat na základě čísla myriáda, což je v dnešním zápisu číslo 10^4. Čísla začíná budovat v jednotlivých periodách. První perioda začíná číslem 1 a pokračuje po jedné dále až k číslu 10^4, tj. jedné myriádě. K té se přičte jednička a pokračuje se postupně dále až k číslu 10^8, tj. k myriádě myriád. Tím končí první řádek první periody - tzv. první čísla. Druhá čísla začínají číslem 10^8+1 a po jedné pokračují až k číslu $10^{2.8}$. Třetí čísla první periody začínají číslem $10^{2.8}$ a po jedné se zvětšují až k číslu $10^{3.8}$. Analogickým postupem dospívá Archimédes až k myriadtým číslům, která začínají číslem $10^{(10^8-1)8}$ a končí číslem $10^{10^8 8}$. Tím je první perioda ukončena. Analogicky pokračuje pak dále až se dostane na konci myriadté periody k číslu $\left(10^{10^8 8}\right)^{10^8} = 10^{8.10^{16}}$, tj. k číslu, které má 80 tisíc bilionů nul (viz tab. 1).

První perioda	
první čísla	$1, 2, \ldots, 10^4, 10^4+1, \ldots, 2.10^4, 2.10^4+1, \ldots, 10^4.10^4 = 10^8$
druhá čísla	$10^8+1, \ldots, 10^{2.8}$
třetí čísla	$10^{2.8}+1, \ldots, 10^{3.8}$
…	
myriadtá čísla	$10^{(10^8-1)8}+1, \ldots, 10^{10^8 8}$
Druhá perioda	
	$10^{10^8.8}+1, \ldots, \left(10^{10^8 8}\right)^2$
Třetí perioda	
	$\left(10^{10^8 8}\right)^2+1, \ldots, \left(10^{10^8 8}\right)^3$
…	
Myriadtá perioda	
	$\left(10^{10^8 8}\right)^{10^8-1}+1, \ldots, \left(10^{10^8 8}\right)^{10^8} = 10^{8.10^{16}}$

tab. 1

Cílem práce na číselném systému bylo:

1. vytvořit číselný systém - byl sice popisovaný slovně, ale byl to základ číselného systému;
2. sepsat úvahy o velmi velkých číslech;
3. zpochybnit nespočitatelnost – tj. ukázat, že lze najít libovolně velké číslo, kterým lze vyjádřit počet určitých předmětů.

Výhody svého číselného systému a možnosti použití velkých čísel vytvořeného číselného systému demonstruje Archimédes na počítání zrnek písku, která by se vešla:

1. do celého vesmíru, tj. do sféry Slunce při používání geocentrického systému resp. do sféry Země při používání heliocentrického systému;

V době, kdy žil Archimédes, někteří učenci zastávali geocentrický pohled na dosud známý vesmír, jiní zastávali heliocentrický pohled na vesmír.

Uvažované sféry, které hypoteticky Archimédes zaplňuje pískem, jsou dány tak, že Země (resp. Slunce) je ve nehybná a Slunce (resp. Země) obíhá kolem. Poloměr uvažované sféry je pak vzdálenost Země od Slunce.

2. do sféry hvězd.

Aby mohl Archimédes své výpočty provést, musí nutně znát:

1. poloměr vesmíru (tj. sféry Země resp. Slunce);
2. poloměr sféry hvězd;
3. poloměr zrnka písku.

Při svých dalších měřeních přitom vychází z měření, která prováděl Eratosthenes a Aristarchos. Všechny číselné hodnoty, které při počítání zrnek písku potřeboval, volil tak, aby výsledek zvětšil. Chtěl totiž panovníkovi ukázat, že jím zavedený systém čísel je dostatečný i pro tak absurdní úlohy, jako je zaplňování vesmíru pískem. Předpoklady, na kterých Archimédes založil své výpočty, byly:

1. Obvod Země je 3.10^6 stadií.

Eratostothenes naměřil hodnotu řádově 10krát menší.

2. Průměr Slunce je větší než průměr Země a ten je větší než průměr Měsíce.
3. Průměr Slunce je přibližně roven třiceti průměrům Měsíce.

Aristarchos uvádí poměr 19:1 a ten byl ze všech v té době měřených největší. Archimédes přesto ale použil hodnotu poměru průměrů těchto dvou těles vyšší.

4. Průměr Slunce je větší než strana tisíciúhelníka vepsaného do největšího kruhu vesmíru.

Aristarchos uvádí, že je průměr Slunce roven jedné sedmsetdvacetině kruhu ekliptiky.

5. Poměr průměrů Země a vesmíru je roven poměru průměrů vesmíru a sféry stálic.

Je-li obvod Země 3.10^6 stadií, je průměr Země nejvýše 10^6 stadií, neboť obvod je větší než trojnásobek průměru. Je-li průměr Slunce je roven nejvýše 30 poloměrům Země, pak je roven nejvýše 30.10^6 stadií. Obvod vesmíru je roven nejvýše 1000násobku průměru Slunce, tedy $30000.10^6 \text{ stadií} = 3.10^{10} \text{ stadií}$. Průměr vesmíru je tedy nejvýše 10^{10} stadií. Průměr sféry stálic je roven nejvýše 10^4 průměrům vesmíru a tedy průměr sféry stálic je 10^{14} stadií. Další úvahy se týkají průměru zrnka písku. Podle Archiméda se do zrnka máku vejde nejvýše myriáda zrnek písku, tj. 10^4 zrnek písku.

To tedy znamená, že Archimédes ve svých úvahách uvažuje o velmi jemném písku, o jemném prachu.

Průměr zrnka máku je přitom menší než čtyřicetina palce. Stadion je přibližně 600 stop a jedna stopa má 16 palců. Jeden stadion tedy je $600.16 \text{ palců} = 9600 \text{ palců} \doteq 10^4 \text{ palců}$. Koule o průměru jednoho palce tedy obsahuje $40.40.40.10^4 = 64.10^7$ zrnek písku. Po zaokrouhlení nahoru dostáváme, že koule o průměru jednoho palce obsahuje nejvýše 10^9 zrnek písku. Koule o průměru jednoho stadia tedy obsahuje $\left(10^4\right)^3.10^9 = 10^{21}$ zrnek písku. Koule o průměru 10^{10} stadií (tj. vesmír) tedy obsahuje $\left(10^{10}\right)^3.10^{21} = 10^{51}$ zrnek písku.

Koule o průměru 10^{14} stadií (tedy sféra stálic) obsahuje $\left(10^{14}\right)^3 .10^{21} = 10^{63}$ zrnek písku.

Toto obrovské číslo můžeme napsat ve tvaru $10^{63} = 10^7 .10^{7.8}$, tj. podle Archimédova číselného systému (viz tab. 1) se jedná o číslo z osmých čísel první periody!

Čísla osmé periody totiž končí číslem $10^{8.8} = 10^{64}$.

Současní astronomové přitom odhadují, že v celém pozorovatelném vesmíru je obsaženo 10^{80} těžkých částic (tzv. baryonů).
