Pythagorejské trojice

Spolu s důkazem Pythagorovy věty se začali pythagorejci zajímat o tzv. pythagorejské trojice.

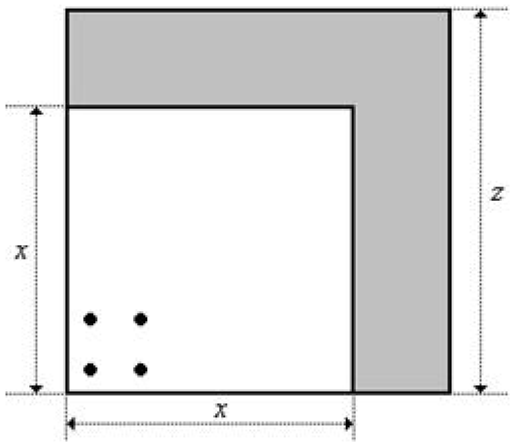
PYTHAGOREJSKOU TROJICÍ ROZUMÍME TAKOVOU TROJICI $(x; y; z)$ PŘIROZENÝCH ČÍSEL x, y A z, PRO KTERÁ PLATÍ: $x^2 + y^2 = z^2$.

To znamená, že přirozená čísla patřící do dané Pythagorejské trojice tvoří strany nějakého pravoúhlého trojúhelníka a platí pro ně Pythagorova věta.

Nejznámější takovou trojicí je trojice (3; 4; 5), kterou využívali již staří Egypťané k vytyčování pravých úhlů. Je-li navíc (*x*; *y*; *z*) pythagorejská trojice, je pythagorejskou trojicí i trojice čísel (*kx*; *ky*; *kz*), kde *k* je přirozené číslo. Proto se stačí při vyšetřování pythagorejských trojic omezit jen na tzv. základní pythagorejské trojice.

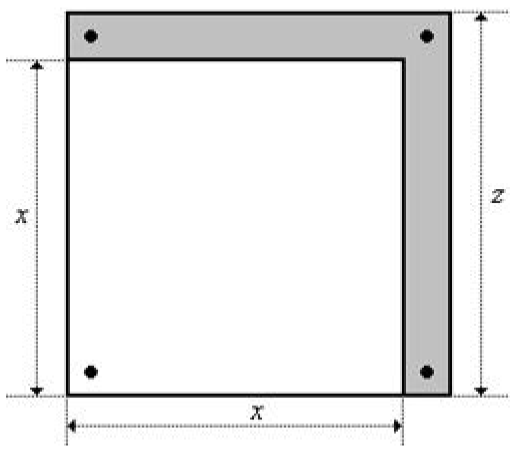
Tvar čísel, která tvoří pythagorejskou trojici, můžeme odvodit na základě tzv. figurálních čísel. Problém nalezení pythagorejských trojic můžeme přeformulovat tedy takto: za jakých podmínek můžeme přeskládat vyšrafovaný gnómon zobrazený na obr. 49 na čtverec?

Obsah velkého čtverce zobrazeného na obr. 49 je z^2, protože tento čtverec má stranu délky *z*. Obsah malého („bílého“) čtverce je x^2. Má-li platit vztah $x^2 + y^2 = z^2$, pak musí být obsah vyšrafovaného gnómu roven y^2. Proto se ptáme na podmínky, za kterých můžeme daný gnómon přeskládat na čtverec.

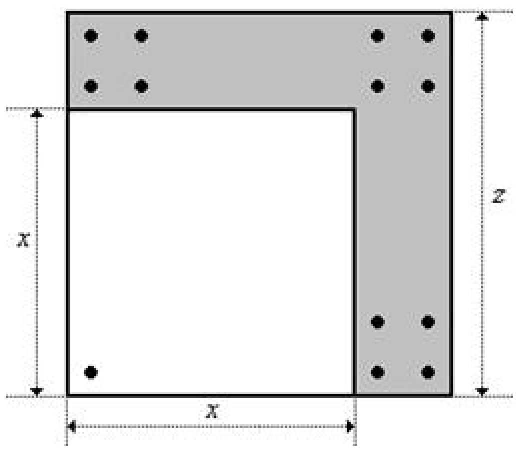


Obr. 49

Uvažujme nejdříve gnómon šířky 1 (viz obr. 50). V tom případě platí $z = x + 1$ a obsah gnómu je vyjádřen lichým číslem, tj. y^2 je číslo liché.



Obr. 50



Obr. 51

Z hlediska současné matematiky se zde dopouštíme drobné terminologické nepřesnosti, při které dané figurální číslo charakterizujeme obsahem gnómu a současně samotným číslem (počtem „černých kroužků“ charakterizujících dané číslo). Z hlediska řecké matematiky to ovšem bylo plně v souladu s geometrickým řešením úloh.

Podél každé ze dvou stran čtverce o délce *x* můžeme naskládat libovolný počet „černých kroužků“. Jejich celkový počet je dán sudým číslem („sudé + sudé = sudé“ a „liché + liché = liché“). Ale v rohu vyšrafovaného gnómu je „kroužek“ navíc - proto gnómon obsahuje lichý počet „kroužků“ a tedy jeho plocha je vyjádřena lichým číslem.

Na základě vlastnosti druhých mocnin to znamená, že i *y* je číslo liché. Proto můžeme psát: $y = 2p + 1$.

Při libovolném přirozeném *p* je číslo 2*p* sudé, po přičtení jedničky dostáváme číslo liché.

Proto platí: $y^2 = 4p^2 + 4p + 1$. Abychom získali *x*, musíme od y^2 odečíst 1 a výsledek vydělit dvěma.

Číslo *x* vyjadřuje počet „kroužků“ podél jedné strany „bílého“ čtverce. Číslo y^2 vyjadřuje počet černých „kroužků“ ve vyšrafovaném gnómu, který má šířku rovnou jednomu „kroužku“; proto platí $y^2 = 2x + 1$, kde přičtená jednička odpovídá „kroužku“ v pravém horním rohu gnómu.

Takže dostáváme: $x = \frac{y^2 - 1}{2} = \frac{4p^2 + 4p + 1 - 1}{2} = 2p^2 + 2p$. A tedy podle počátečního předpokladu můžeme již dopočítat *z*: $z = x + 1 = 2p^2 + 2p + 1$. Získali jsme tedy pythagorejské trojice ve tvaru $\left(2p^2 + 2p; 2p + 1; 2p^2 + 2p + 1\right)$, kde *p* je libovolné přirozené číslo.

Získali jsme tedy pythagorejské trojice: (4; 3; 5), (12; 5; 13), (24; 7; 25), (40; 9; 41), ...

Budeme-li uvažovat gnómon šířky 2 (viz obr. 51), budeme předpokládat, že platí $z = x + 2$. Potom je obsah gnómu vyjádřen sudým číslem, tj. y^2 je číslo sudé. Proto je sudé i číslo *y* a můžeme jej psát ve tvaru $y = 2p$. To znamená, že $y^2 = 4p^2$. Pro číslo *x* v tomto případě platí: $x = \frac{y^2 - 4}{4} = \frac{4p^2 - 4}{4} = p^2 - 1$.

Podél každé ze dvou stran „bílého“ čtverce o délce *x* jsou v gnómu umístěny 2 řady „kroužků“. Takže těchto „kroužků“ je celkem 2 krát 2*x*, tj. 4*x*. A v levém horním rohu gnómu jsou 4 „kroužky“ navíc. Proto je v gnómu celkem 4*x* + 4 „kroužků“. A tento počet je roven obsahu gnómu, tj. je roven číslu y^2.

Nyní už můžeme vyjádřit na základě původního předpokladu i *z*: $z = x + 2 = p^2 + 1$. Získali jsme tak pythagorejské trojice ve tvaru $\left(p^2 - 1; 2p; p^2 + 1\right)$, kde *p* je libovolné přirozené číslo větší než 1.

Mezi pythagorejské trojice v tomto tvaru patří trojice: (3; 4; 5), (8; 6; 10), (15; 8; 17), (24; 10; 26), ...

Pythagorejské trojice zapisované v tomto tvaru údajně objevil Platon.

© Encyklopedie Fyziky (http://fyzika.jreichl.com); Jaroslav Reichl, Martin Všetička
Licence http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/ zakazuje úpravy a komerční distribuci.