

## Pythagorejské trojice

Spolu s [důkazem Pythagorovy věty](#) se začali [pythagorejci](#) zajímat o tzv. pythagorejské trojice.

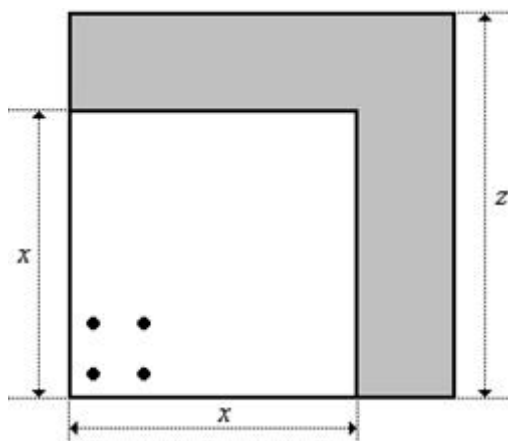
**PYTHAGOREJSKOU TROJICÍ ROZUMÍME TAKOVOU TROJICI  $(x, y, z)$  PŘIROZENÝCH ČÍSEL  $x, y$  A  $z$ , PRO KTERÁ PLATÍ:  $x^2 + y^2 = z^2$ .**

To znamená, že přirozená čísla patřící do dané Pythagorejské trojice tvoří strany nějakého pravoúhlého trojúhelníka a platí pro ně [Pythagorova věta](#).

Nejznámější takovou trojicí je trojice (3; 4; 5), kterou využívali již staří Egypťané k vytyčování pravých úhlů. Je-li navíc  $(x; y; z)$  pythagorejská trojice, je pythagorejskou trojicí i trojice čísel  $(kx; ky; kz)$ , kde  $k$  je přirozené číslo. Proto se stačí při vyšetřování pythagorejských trojic omezit jen na tzv. základní pythagorejské trojice.

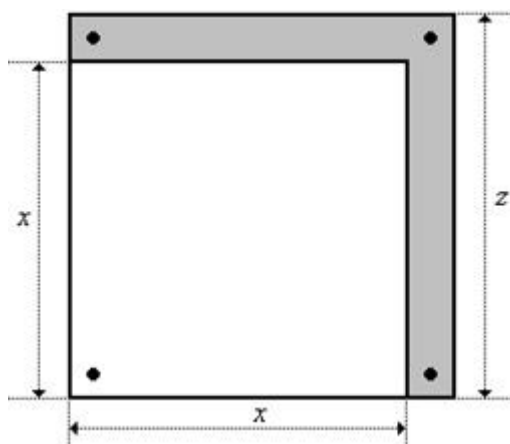
Tvar čísel, která tvoří pythagorejskou trojici, můžeme odvodit na základě tzv. [figurálních čísel](#). Problém nalezení pythagorejských trojic můžeme přeformulovat tedy takto: za jakých podmínek můžeme přeskládat vyšrafovaný gnómon zobrazený na obr. 49 na čtverec?

Obsah velkého čtverce zobrazeného na obr. 49 je  $z^2$ , protože tento čtverec má stranu délky  $z$ . Obsah malého („bílého“) čtverce je  $x^2$ . Má-li platit vztah  $x^2 + y^2 = z^2$ , pak musí být obsah vyšrafovaného gnómu roven  $y^2$ . Proto se ptáme na podmínky, za kterých můžeme daný gnómon přeskládat na čtverec.

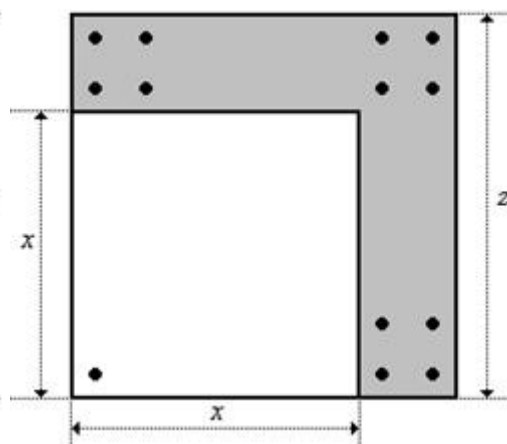


Obr. 49

Uvažujme nejdříve gnómon šířky 1 (viz obr. 50). V tom případě platí  $z = x + 1$  a obsah gnómu je vyjádřen lichým číslem, tj.  $y^2$  je číslo liché.



Obr. 50



Obr. 51

Z hlediska současné matematiky se zde dopouštíme drobné terminologické nepřesnosti, při které dané figurální číslo charakterizujeme obsahem gnómu a současně samotným číslem (počtem „černých kroužků“ charakterizujících dané číslo). Z hlediska [řecké matematiky](#) to ovšem bylo plně v souladu s [geometrickým řešením](#) úloh.

Podél každé ze dvou stran čtverce o délce  $x$  můžeme naskládat libovolný počet „černých kroužků“. Jejich celkový počet je dán sudým číslem („sudé + sudé = sudé“ a „liché + liché = liché“). Ale v rohu vyšrafovaného gnómu je „kroužek“ navíc - proto gnómon obsahuje lichý počet „kroužků“ a tedy jeho plocha je vyjádřena lichým číslem.

Na základě vlastnosti druhých mocnin to znamená, že  $y$  je číslo liché. Proto můžeme psát:  $y = 2p + 1$ .

Při libovolném přirozeném  $p$  je číslo  $2p$  sudé, po přičtení jedničky dostáváme číslo liché.

Proto platí:  $y^2 = 4p^2 + 4p + 1$ . Abychom získali  $x$ , musíme od  $y^2$  odečíst 1 a výsledek vydělit dvěma.

Číslo  $x$  vyjadřuje počet „kroužků“ podél jedné strany „bílého“ čtverce. Číslo  $y^2$  vyjadřuje počet černých „kroužků“ ve vyšrafovaném gnómu, který má šířku rovnou jednomu „kroužku“; proto platí  $y^2 = 2x + 1$ , kde přičtená jednička odpovídá „kroužku“ v pravém horním rohu gnómu.

Takže dostáváme:  $x = \frac{y^2 - 1}{2} = \frac{4p^2 + 4p + 1 - 1}{2} = 2p^2 + 2p$ . A tedy podle počátečního předpokladu můžeme již dopočítat  $z$ :  $z = x + 1 = 2p^2 + 2p + 1$ . Získali jsme tedy pythagorejské trojice ve tvaru  $(2p^2 + 2p; 2p + 1; 2p^2 + 2p + 1)$ , kde  $p$  je libovolné přirozené číslo.

Získali jsme tedy pythagorejské trojice: (4; 3; 5), (12; 5; 13), (24; 7; 25), (40; 9; 41), ...

Budeme-li uvažovat gnómon šířky 2 (viz obr. 51), budeme předpokládat, že platí  $z = x + 2$ . Potom je obsah gnómu vyjádřen sudým číslem, tj.  $y^2$  je číslo sudé. Proto je sudé i číslo  $y$  a můžeme jej psát ve tvaru  $y = 2p$ . To znamená, že  $y^2 = 4p^2$ . Pro číslo  $x$  v tomto případě platí:  $x = \frac{y^2 - 4}{4} = \frac{4p^2 - 4}{4} = p^2 - 1$ .

Podél každé ze dvou stran „bílého“ čtverce o délce  $x$  jsou v gnómu umístěny 2 řady „kroužků“. Takže těchto „kroužků“ je celkem 2 krát  $2x$ , tj.  $4x$ . A v levém horním rohu gnómu jsou 4 „kroužky“ navíc. Proto je v gnómu celkem  $4x + 4$  „kroužků“. A tento počet je roven obsahu gnómu, tj. je roven číslu  $y^2$ .

Nyní už můžeme vyjádřit na základě původního předpokladu i  $z$ :  $z = x + 2 = p^2 + 1$ . Získali jsme tak pythagorejské trojice ve tvaru  $(p^2 - 1; 2p; p^2 + 1)$ , kde  $p$  je libovolné přirozené číslo větší než 1.

Mezi pythagorejské trojice v tomto tvaru patří trojice: (3; 4; 5), (8; 6; 10), (15; 8; 17), (24; 10; 26), ...

Pythagorejské trojice zapisované v tomto tvaru údajně objevil [Platon](#).