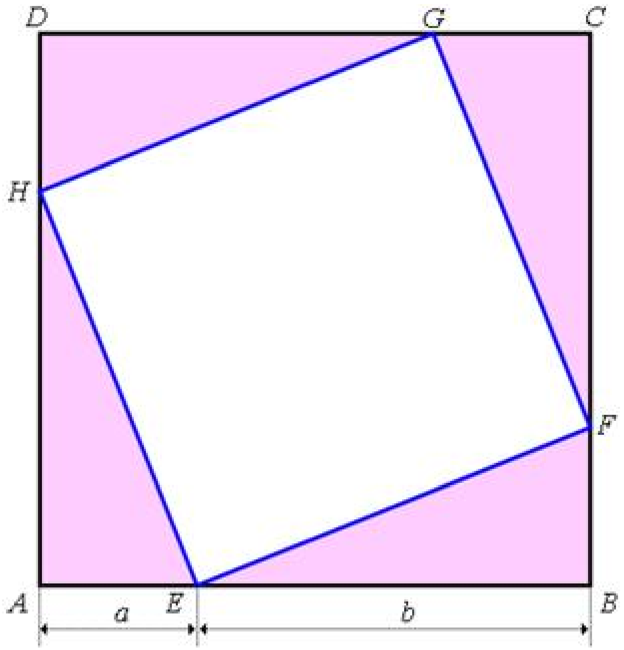
Důkaz platnosti algebraických vztahů

Využitím geometrického řešení lze také dokázat platnost některých algebraických vztahů.

Platnost vztahu, který v současné době zapisujeme ve tvaru $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, lze dokázat s využitím obr. 11. Na něm je zobrazen čtverec *ABCD* o straně délky *a* + *b*; jeho obsah tedy je $(a+b)^2$. Do tohoto čtverce je vepsán další čtverec a čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. Obsah čtverce *EFGH* přitom je $a^2 + b^2$ - tento čtverec je totiž sestrojen nad přeponou jednoho ze čtyř pravoúhlých trojúhelníků *HAE*, *EBF*, *FCG* nebo *GDH*. Všechny tyto pravoúhlé trojúhelníky mají odvěsny o délkách *a* a *b*. Podle Pythagorovy věty je pak délka jejich přepon rovna $\sqrt{a^2 + b^2}$ a tedy obsah čtverce sestrojeného nad touto přeponou je roven $a^2 + b^2$. Obsahy uvedených čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků jsou přitom rovny obsahu dvou obdélníků o stranách délky *a* a *b*.

Dva tyto pravoúhlé trojúhelníky lze totiž přeskládat do jednoho obdélníka.



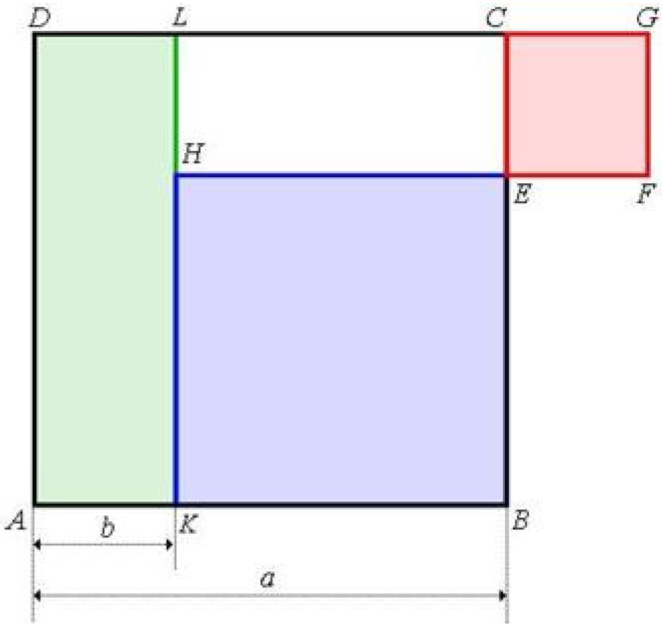
Obr. 11

Obsah čtverce *ABCD* tedy můžeme psát buď ve tvaru $(a+b)^2$ nebo v ekvivalentním vyjádření jako součet obsahu čtverce *EFGH* a čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků, tedy $a^2 + b^2 + 2ab$.

Tím je platnost vztahu dokázána.

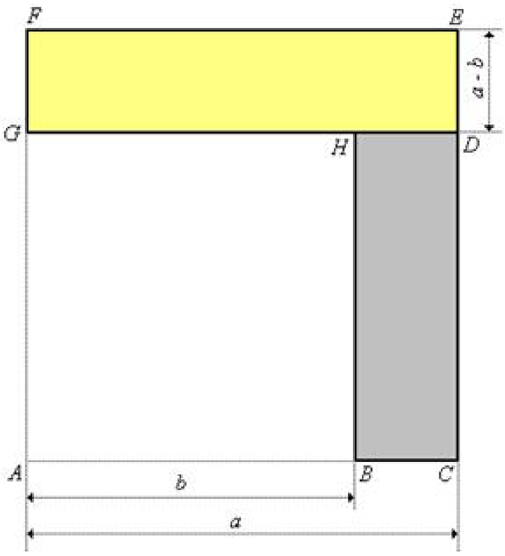
Analogicky lze dokázat platnost vztahu, který v současné době zapisujeme ve tvaru $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Na obr. 12 je zobrazen čtverec *KBEH* o straně délky *a* - *b* a tedy o obsahu $(a-b)^2$. Obsah tohoto čtverce přitom můžeme vyjádřit také pomocí obsahu čtverce *ABCD*, obsahu čtverce *EFGC* a obsahů dvou obdélníků *AKLD* a *HFGL*. Obsah čtverce *ABCD*, jehož strana má délku *a*, je a^2. Obsah čtverce *EFGC* o straně délky *b* je b^2. Každý z obdélníků *AKLD* a *HFGL* má strany délky *a* a *b*, a proto obsah každého z nich je *ab*.

Přitom obsah čtverce *KBEH* je roven součtu obsahů čtverců *ABCD* a *EFGC* zmenšenému o obsah obou obdélníků *AKLD* a *HFGL*. Tím je platnost uvedeného vztahu dokázána.

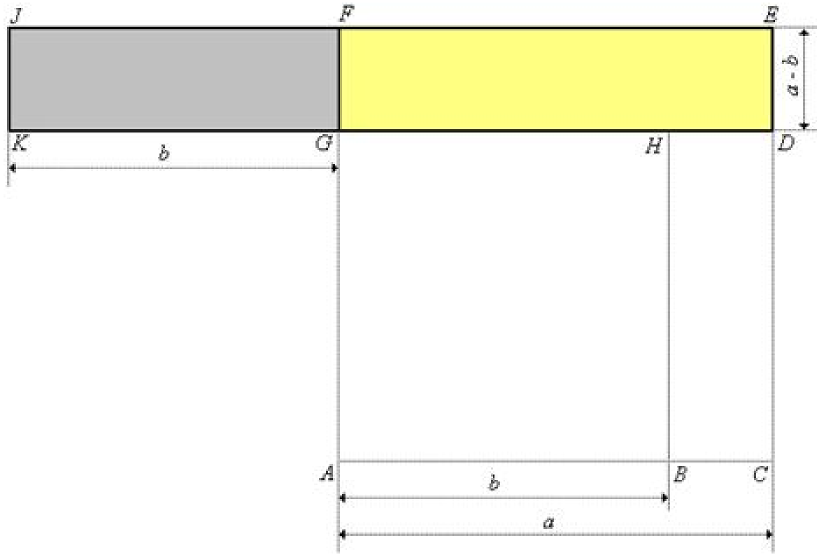


Obr. 12

Také vztah, který se v současné době zapisuje ve tvaru $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, lze dokázat geometricky. Na obr. 13 je zobrazen gnómon *BCEFGH*, který vznikl ze čtverce *ACEF* o straně délky *a* vyříznutím čtverce *ABHG* o straně délky *b*. Obsah gnómu *BCEFGH* proto je $a^2 - b^2$.



Obr. 13



Obr. 14

Gnómon *BCEFGH* lze ovšem přeskládat do obdélníka *DEJK* zobrazeného na obr. 14, přičemž tento obdélník má stejný obsah jako původní gnómon. Obdélník *DEJK* má přitom strany délky *a* - *b* a *a* + *b*, tj. jeho obsah je $(a+b)(a-b)$.

Tím je platnost vztahu dokázána.

Analogicky lze dokázat také platnost vztahů, v nichž se vyskytují třetí mocniny.