Řešení algebraických rovnic

Pomocí geometrického řešení lze řešit i úlohy, které v současnosti zapisujeme algebraicky a tak je i řešíme. Při tomto postupu je nutné si uvědomit, že řecká matematika byla schopna řešit pouze takové rovnice, ve kterých byl dodržen zákon homogenity.

Geometricky byli Řekové schopni řešit rovnice těchto typů:

1. $ax = b^2$;
2. $x^2 = ab$;
3. $ax - x^2 = b^2$;
4. $ax + x^2 = b^2$;

Volbou *b* = *a* přejde tato rovnice na rovnici $ax + x^2 = a^2$, která popisuje tzv. zlatý řez.

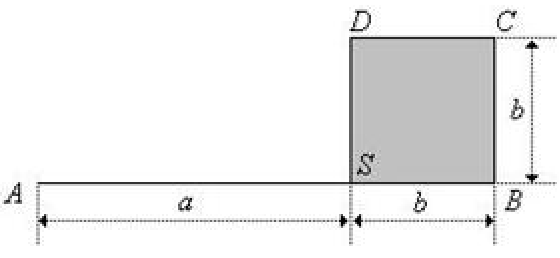
5. $x^2 - ax = b^2$.

Těmito typy kvadratických rovnic jsou reprezentovány všechny kvadratické rovnice, které mohli Řekové řešit. Řekové neznali záporná čísla a tedy veličiny *a*, *b* a hledaná veličina *x* v uvedených rovnicích představují kladné veličiny - délky úseček.

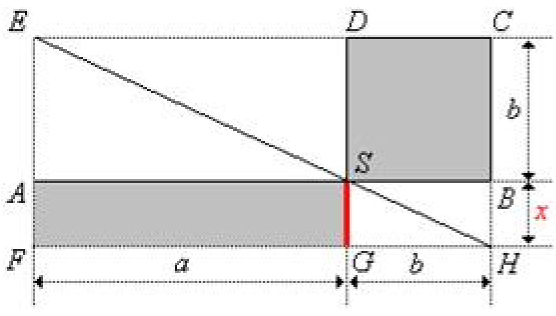
V současném zápisu máme „jednu“ kvadratickou rovnici ve tvaru $Ax^2 + Bx + C = 0$, kterou umíme obecně řešit. Výše uvedené rovnice jsou pak speciálními případy této obecné rovnice (i pro případ *A* = 0, který se v současné terminologii mezi kvadratické rovnice nepočítá). Pro řeky bylo ale výše uvedených pět rovnic různých - nezapisovali je matematickou symbolikou jako my, ale slovně. Proto je navzájem nespojovali v jeden typ rovnice.

Jako ukázku popíšeme řešení dvou z výše uvedených rovnic.

Rovnice $ax = b^2$ je lineární rovnice a představuje tuto geometrickou úlohu: Hledáme délku strany obdélníka s jednou stranou o délce *a*, jehož obsah je roven obsahu daného čtverce se stranou délky *b*. Geometrické řešení je zobrazené na obr. 15 a obr. 16. K úsečce *AS* délky *a* „přiložíme“ čtverec *SBCD* o straně délky *b* (viz obr. 15). Tento obrázek doplníme na obdélník *CEFH* (viz obr. 16). Postup doplnění na obdélník je zřejmý: v bodě *A* sestrojíme kolmici *k* na úsečku *AS* , která protne polopřímku *CD* v bodě *E*. Polopřímka *ES* protne polopřímku *CB* v bodě *H*. Nyní vedeme bodem *H* rovnoběžku s úsečkou *AS*; tato rovnoběžka protne kolmici *k* v bodě *F*. Tak získáme všechny vrcholy obdélníka *CEFH*.



Obr. 15



Obr. 16

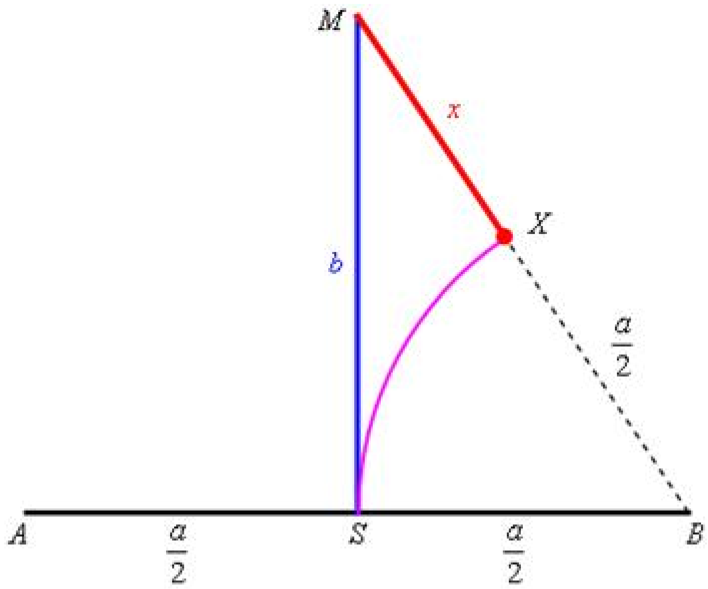
Úhlopříčka *EH* půlí obdélník *CEFH*, ale také obdélníky *ASDE* a *GHBS*. Trojúhelníky *FHE* a *CEH* mají tedy stejný obsah. Trojúhelník *FHE* je složen z trojúhelníků *ASE* a *GHS* a obdélníka *FGSA*, trojúhelník *CEH* je složen z trojúhelníků *DES* a *BSH* a čtverce *SBCD*. Vzhledem k tomu, že trojúhelníky *ASE* a *DES* jsou navzájem shodné a trojúhelníky *GHS* a *BSH* jsou navzájem také shodné, má čtverec *SBCD* stejný obsah jako obdélník *FGSA*. Proto je úsečka *GS* hledanou neznámou *x*.

Naprosto stejným postupem by se řešila i rovnice $ax = bc$.

V současné době bychom úlohy těchto typů řešili spíše pomocí Eukleidových vět (konkrétně pomocí Eukleidovy větě o odvěsně).

Nyní se podíváme na řešení kvadratické rovnice $ax + x^2 = b^2$. Narýsujeme úsečku *AB* délky *a* a v jejím středu *S* sestrojíme kolmici *SM* o délce *b* (viz obr. 17). Dále sestrojíme kružnici se středem v bodě *B*, která prochází bodem *S* (tj. tato kružnice má poloměr rovný polovině délky úsečky *AB*). Průsečík této kružnice s úsečkou *MB* označíme *X*. Délka úsečky *MX* představuje řešení zadané rovnice.

Druhý kořen řešené rovnice je záporný, takže jej Řekové neuvažovali. Nicméně i ten lze získat na základě popsané konstrukce: jeho absolutní hodnota je dána součtem délek úseček *AB* a *MX*.

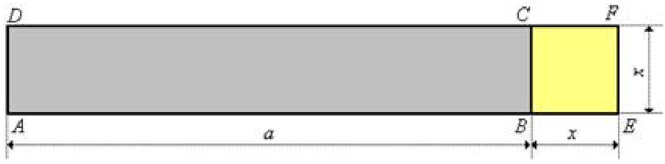


Obr. 17

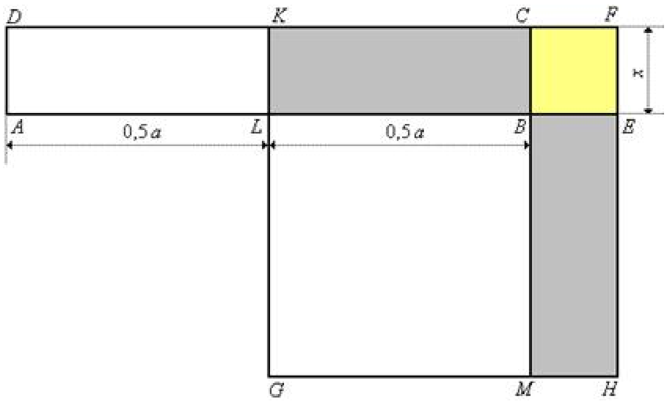
Právě popsaná konstrukce vychází z jiné geometrické úvahy. Výraz $ax + x^2$ vystupující na levé straně řešené rovnice můžeme chápat jako součet obsahů obdélníka *ABCD* se stranami délek *a* a *x* a čtverce *BEFC* se stranou délky *x* (viz obr. 18).

Uvažujme dále čtverec *GHFK*, kde *K* je střed úsečky *CD* (viz obr. 19). Potom obdélníky *ALKD* a *HEBM* jsou shodné. Obsah gnómu *HFKLBM* je proto roven obsahu obdélníka *AEFD*. Čtverec *GHFK* má stranu délky $\frac{a}{2} + x$ a tedy má obsah $\left(\frac{a}{2} + x\right)^2$. Tento čtverec je rozdělen na čtverec *GMBL* se stranou délky $\frac{a}{2}$ a tedy o obsahu $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ a na gnómon *HFKLBM* o obsahu $ax + x^2 = b^2$. Proto platí: $\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$.

Tento vztah přitom vyjadřuje Pythagorovu větu pro pravoúhlý trojúhelník *SBM* na obr. 17. Proto je výše uvedený postup nalezení řešený zakreslený právě na obr. 17 matematicky korektní.



Obr. 18



Obr. 19

Geometrické úvahy, kterými Řekové zdůvodňovali geometrické konstrukce použité při řešení úloh, se nazývají **přikládání ploch**. Toto přikládání může být trojí:

1. eliptické přikládání - slovo *elleipsis* znamená *nedostatek*;

Týká se řešení rovnice $ax - x^2 = b^2$, v němž se od obsahu obdélníka o stranách délky *a* a *x* odečítá obsah čtverce o straně délky *x*. Obsah obdélníka vystupující na levé straně rovnice má „nedostatek“ (tj. kus mu chybí).

2. hyperbolické přikládání - slovo *hyperbolé* znamená *přebytek*;

Při řešení rovnice $ax + x^2 = b^2$ má obsah obdélníku vystupujícího na levé straně rovnice „přebytek“ (tj. má kus navíc - má navíc čtverec o obsahu x^2).

3. parabolické přikládání - slovo *parabolé* znamená *přiložení*.

Tento typ přikládání se týká řešení rovnice $ax = b^2$.

Nahradíme-li v rovnicích $ax - x^2 = b^2$, $ax + x^2 = b^2$ a $ax = b^2$ písmeno *b* písmenem *y*, přejdou tyto rovnice na rovnici jedné z kuželoseček. V uvedeném pořadí získáme rovnici elipsy, hyperboly a paraboly.

Výše uvedené úvahy jsou založeny pouze na Pythagorově větě; Eukleidovy věty nebyly použity. Možná to znamená, že úvahy vedoucí k výše uvedeným řešením byly prováděny ještě před objevením Eukleidových vět.