

Definice zlatého řezu

Speciálním případem úměry $a:b = p:q$ je tzv. **zlatý řez**. Uvažujme úsečku AB , na níž leží bod C (viz obr. 23).

ŘEKNEME, ŽE BOD C DĚLÍ ÚSEČKU AB V POMĚRU ZLATÉHO ŘEZU, JESTLIŽE PRO DÉLKY UVAŽOVANÝCH ÚSEČEK PLATÍ VZTAH

$$|AB|:|AC| = |AC|:|CB|, \quad (10)$$

POMĚR DÉLEK CELÉ ÚSEČKY A JEJÍ DELŠÍ ČÁSTI JE TEDY ROVEN POMĚRU DÉLEK JEJÍ DELŠÍ ČÁSTI A KRATŠÍ ČÁSTI.



Obr. 23

Po označení délky úsečky AB písmenem a a délky její delší části písmenem x , získáme úměru ve tvaru

$$a:x = x:(a-x). \quad (11)$$

Vyjádříme-li úměru (11) pomocí zlomků ve tvaru $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, můžeme poměrně snadno dojít ke kvadratické rovnici

$$x^2 + ax - a^2 = 0. \quad (12)$$

Vyřešíme-li rovnici (12) současnými metodami, získáme postupně řešení ve tvaru $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$. Po částečném odmocnění získáme řešení ve tvaru

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} a. \quad (13)$$

Je zřejmé, že řešení $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} a$ je kladné a řešení $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} a$ je záporné. Symbolem φ a označením **zlatý řez** se označuje převrácená hodnota kladného řešení, tj. $\varphi = \frac{1}{x_1}$. V dalším textu budeme uvažovat jednotkovou délku úsečky AB .

Jedná se o POMĚR, a proto můžeme uvažovat délku původní úsečky, na základě které byl tento poměr odvozen, rovnu jedné *nějaké jednotce*.

Pojem *zlatý řez* použil poprvé pravděpodobně Leonardo da Vinci. Český matematik František Servít (1848 - 1932), který vydal v roce 1907 první překlad *Eukleidových Základů* do češtiny, použil termín *poměr krajní a střední*. Jiný český matematik Josef Úlehla (1852 - 1933) použil ve svých *Dějinnách matematiky* z roku 1901 pojem *rozdělení úsečky v poměru vnějším a vnitřním*.

$$\text{Označený poměr nyní upravíme a usměrníme: } \varphi = \frac{1}{x_1} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{5}}{-1 - \sqrt{5}} = \frac{2(-1 - \sqrt{5})}{-4}.$$

Dostáváme tak pro zlatý řez vztah

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (14)$$

Hodnota tohoto čísla je $\varphi = 1,618033988\dots$ a patří mezi iracionální čísla. Hodnota kladného kořene rovnice (12) je $x = x_1 = 0,618033988\dots$.

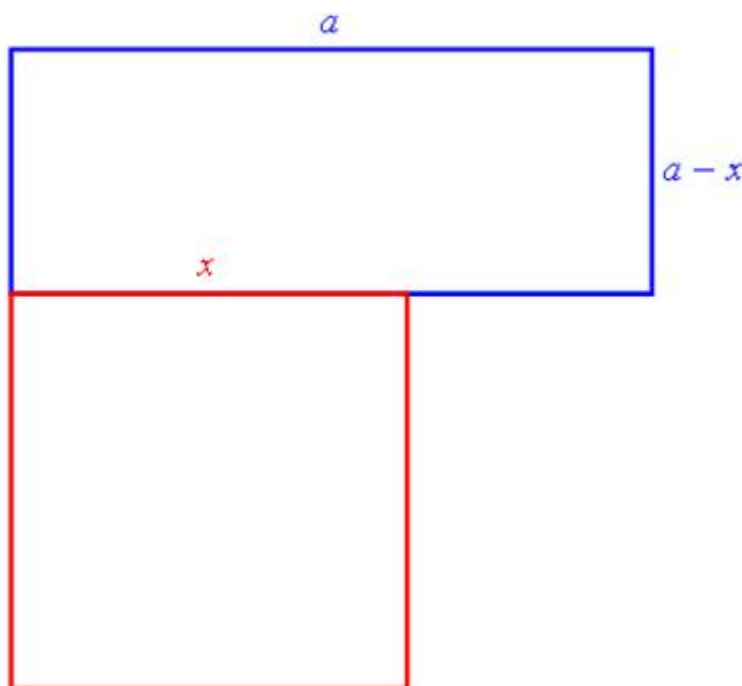
To znamená, že zlatý řez není možné vyjádřit pomocí zlomku. Dokonce ze všech iracionálních čísel je toto číslo „nejiracionálnější“ - tj. nejvíce se odlišuje od všech zlomků.

Jako podíl dvou čísel je možné zlatý řez napsat s využitím členů [Fibonacciho posloupnosti](#). Ale pokud chceme obdržet skutečně zlatý řez, musíme počítat [limitu Fibonacciho posloupnosti](#).

Délka úsečky AC na obr. 23 je [geometrickým průměrem](#) délek úseček AB a CB. Proto je obsah čtverce sestrojeného nad delší částí úsečky AB (tj. nad částí AC) roven obsahu obdélníka, jehož strany mají délky stejné jako je délka celé úsečky AB a délka její kratší části (tj. délka úsečky CB) - viz obr. 24.

Rovnici (12) totiž můžeme přepsat ve tvaru $x^2 = a^2 - ax$, čili $x^2 = a(a - x)$. Tento tvar ale přesně odpovídá geometrickému znázornění problému na obr. 24: obsah čtverce se stranou rovnou délce úsečky AC (tj. x) je roven obsahu obdélníka o stranách stejných délek, jako mají úsečky AB (tj. a) a CB (tj. $a - x$).

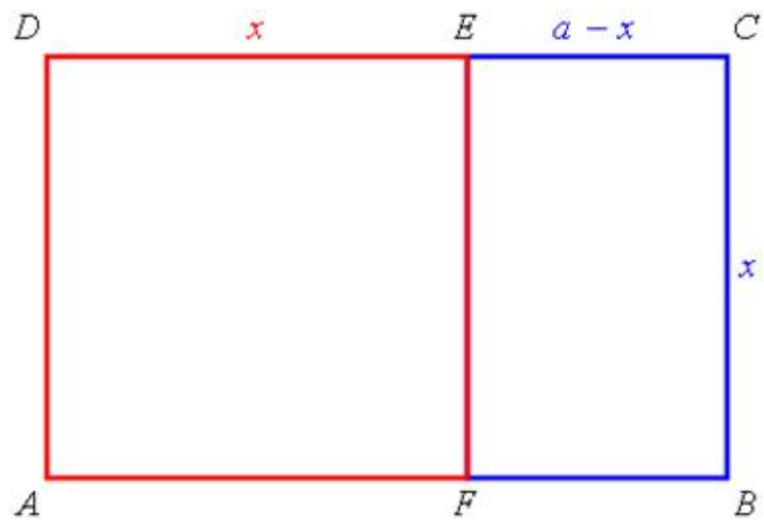
V tomto smyslu je zlatý řez prezentován i v Eukleidových *Základech*.



Obr. 24

Při hledání zlatého řezu vlastně hledáme takový obdélník *BCEF* (obr. 25), který má zajímavou vlastnost. Sestrojíme-li nad jeho delší stranou *EF* čtverec *FEDA*, získáme obdélník *ABCD*, který je obdélníku *BCEF* podobný. Všechny obdélníky s touto vlastností jsou si navzájem podobné. Délky jejich stran jsou pak v poměru zlatého řezu.

Podle obr. 25 můžeme pro podobnost obdélníků *ABCD* a *BCEF* psát: $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|CE|}$. Po dosazení pomocí délek uvažovaných úseček dostáváme poměr $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, který je shodný s definičním poměrem zlatého řezu vyjádřeným vztahem (11).



Obr. 25

© Encyklopedie Fyziky (<http://fyzika.jreichl.com>); Jaroslav Reichl, Martin Všetíčka
Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.