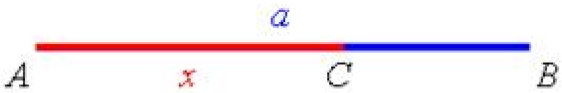
Definice zlatého řezu

Speciálním případem [úměry] *a*:*b* = *p*:*q* je tzv. **zlatý řez**. Uvažujme úsečku *AB*, na níž leží bod *C* (viz obr. 23).

ŘEKNEME, ŽE BOD *C* DĚLÍ ÚSEČKU *AB* V POMĚRU ZLATÉHO ŘEZU, JESTLIŽE PRO DÉLKY UVAŽOVANÝCH ÚSEČEK PLATÍ VZTAH

$$|AB|:|AC| = |AC|:|CB|, \qquad (10)$$

POMĚR DÉLEK CELÉ ÚSEČKY A JEJÍ DELŠÍ ČÁSTI JE TEDY ROVEN POMĚRU DÉLEK JEJÍ DELŠÍ ČÁSTI A KRATŠÍ ČÁSTI.



Obr. 23

Po označení délky úsečky *AB* písmenem *a* a délky její delší části písmenem *x*, získáme úměru ve tvaru

$$a:x = x:(a - x). \qquad (11)$$

Vyjádříme-li úměru (11) pomocí zlomků ve tvaru $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, můžeme poměrně snadno dojít ke kvadratické rovnici

$$x^2 + ax - a^2 = 0\,. \qquad (12)$$

Vyřešíme-li rovnici (12) současnými metodami, získáme postupně řešení ve tvaru $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$. Po částečném odmocnění získáme řešení ve tvaru

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}a\,. \qquad (13)$$

Je zřejmé, že řešení $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$ je kladné a řešení $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}a$ je záporné. Symbolem φ a označením **zlatý řez** se označuje převrácená hodnota kladného řešení, tj. $\varphi = \frac{1}{x_1}$. V dalším textu budeme uvažovat jednotkovou délku úsečky *AB*.

Jedná se o POMĚR, a proto můžeme uvažovat délku původní úsečky, na základě které byl tento poměr odvozen, rovnu jedné *nějaké* jednotce.

Pojem *zlatý řez* použil poprvé pravděpodobně Leonardo da Vinci. Český matematik František Servít (1848 - 1932), který vydal v roce 1907 první překlad Eukleidových *Základů* do češtiny, použil termín *poměr krajní a střední*. Jiný český matematik Josef Úlehla (1852 - 1933) použil ve svých *Dějinách matematiky* z roku 1901 pojem *rozdělení úsečky v poměru vnějším a vnitřním*.

Označený poměr nyní upravíme a usměrníme: $\varphi = \frac{1}{x_1} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}} = \frac{2\left(-1-\sqrt{5}\right)}{-4}$.

Dostáváme tak pro zlatý řez vztah

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \quad (14)$$

Hodnota tohoto čísla je $\varphi = 1,618033988...$ a patří mezi iracionální čísla. Hodnota kladného kořene rovnice (12) je $x = x_1 = 0,618033988...$.

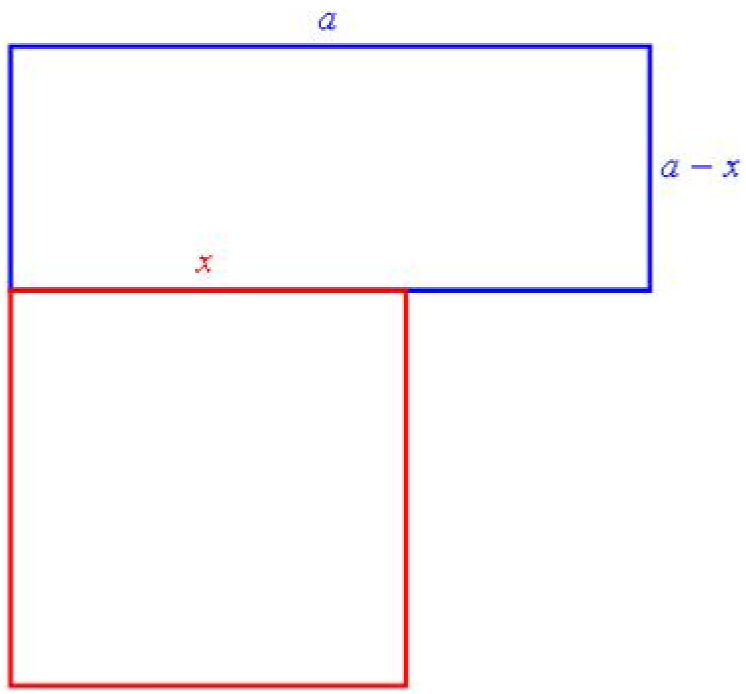
To znamená, že zlatý řez není možné vyjádřit pomocí zlomku. Dokonce ze všech iracionálních čísel je toto číslo „nejiracionálnější“ - tj. nejvíce se odlišuje od všech zlomků.

Jako podíl dvou čísel je možné zlatý řez napsat s využitím členů Fibonacciho posloupnosti. Ale pokud chceme obdržet skutečně zlatý řez, musíme počítat limitu Fibonacciho posloupnosti.

Délka úsečky *AC* na obr. 23 je geometrickým průměrem délek úseček *AB* a *CB*. Proto je obsah čtverce sestrojeného nad delší částí úsečky *AB* (tj. nad částí *AC*) roven obsahu obdélníka, jehož strany mají délky stejné jako je délka celé úsečky *AB* a délka její kratší části (tj. délka úsečky *CB*) - viz obr. 24.

Rovnici (12) totiž můžeme přepsat ve tvaru $x^2 = a^2 - ax$, čili $x^2 = a(a-x)$. Tento tvar ale přesně odpovídá geometrickému znázornění problému na obr. 24: obsah čtverce se stranou rovnou délce úsečky *AC* (tj. *x*) je roven obsahu obdélníka o stranách stejných délek, jako mají úsečky *AB* (tj. *a*) a *CB* (tj. *a* - *x*).

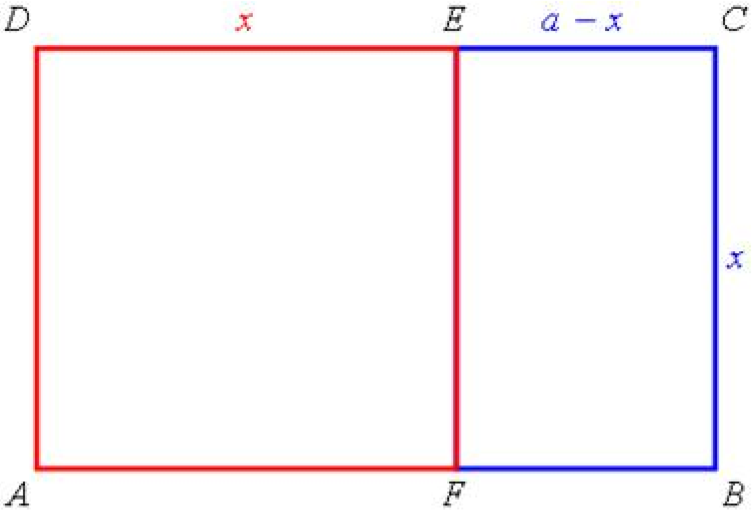
V tomto smyslu je zlatý řez prezentován i v Eukleidových *Základech*.



Obr. 24

Při hledání zlatého řezu vlastně hledáme takový obdélník *BCEF* (obr. 25), který má zajímavou vlastnost. Sestrojíme-li nad jeho delší stranou *EF* čtverec *FEDA*, získáme obdélník *ABCD*, který je obdélníku *BCEF* podobný. Všechny obdélníky s touto vlastností jsou si navzájem podobné. Délky jejich stran jsou pak v poměru zlatého řezu.

Podle obr. 25 můžeme pro podobnost obdélníků *ABCD* a *BCEF* psát: $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|CE|}$. Po dosazení pomocí délek uvažovaných úseček dostáváme poměr $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, který je shodný s definičním poměrem zlatého řezu vyjádřeným vztahem (11).



Obr. 25