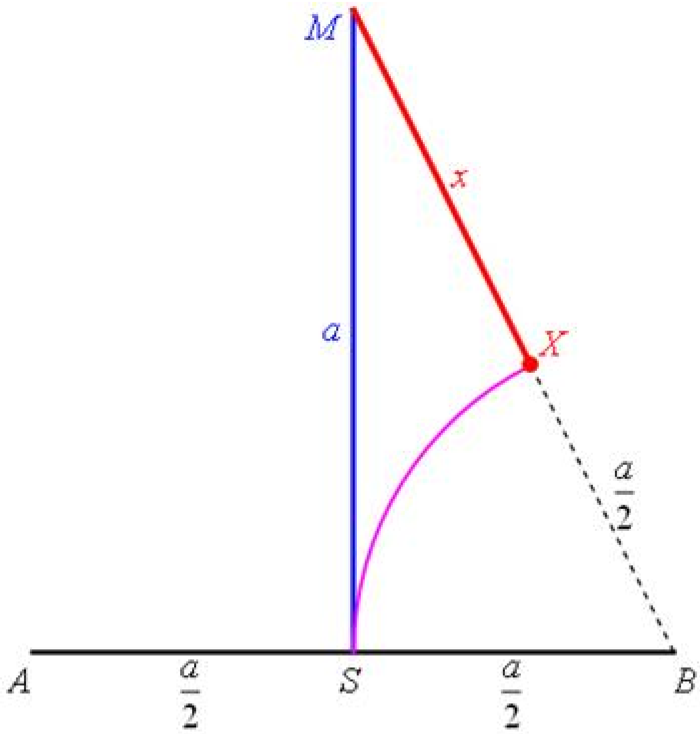
Geometrická konstrukce zlatého řezu

Zkonstruovat zlatý řez ve shodě s geometrickým řešením úloh řecké matematiky je možné třemi postupy. První konstrukce je zobrazena na obr. 26.

1. Sestrojíme úsečku *AB* délky *a*.
2. Najdeme její střed *S*.
3. V bodě *S* sestrojíme k úsečce *AB* kolmici *SM* délky *a*.
4. Z bodu *B* opíšeme kružnici s poloměrem rovným polovině délky úsečky *AB* (tj. délce úsečky *AS*).
5. Na průsečíku této kružnice a úsečky *MB* vznikne bod *X*.
6. Poměr délek úseček *MX* a *AB* je roven zlatému řezu.

Zdůvodnění tohoto postupu vyplývá z geometrického řešení rovnic.

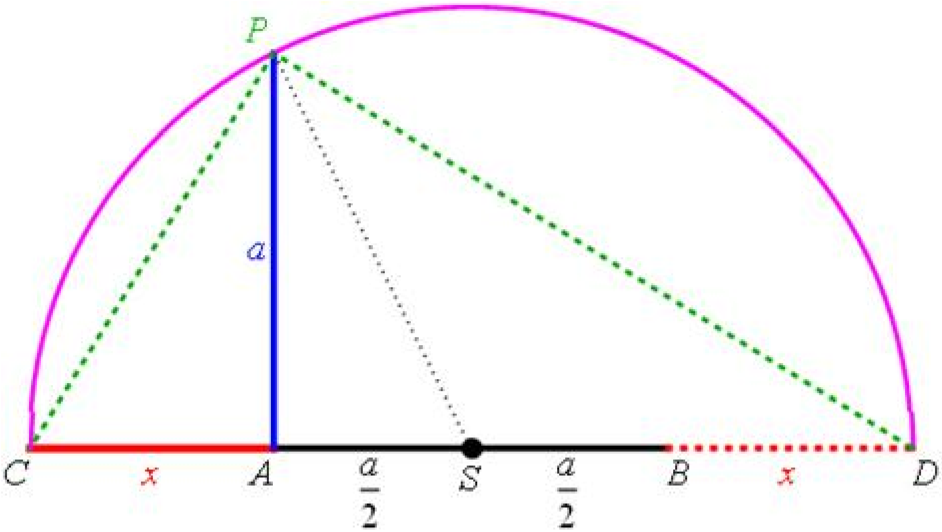


Obr. 26

Druhá konstrukce zlatého řezu vyplývá z Eukleidovy věty o výšce. Rovnici (12) přepíšeme do tvaru $x(a+x)=a^2$ a porovnáme ji s matematickým vyjádřením Euklediovy věty o výšce. Zjistíme, že stačí uvažovat pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou délky $x+(a+x)=a+2x$ a s výškou k této přeponě o délce *a* (viz obr. 27). Samotnou konstrukci provedeme v těchto krocích:

1. Sestrojíme úsečku *AB* délky *a*.
2. Najdeme její střed *S*.
3. V bodě *A* sestrojíme k úsečce *AB* kolmici *AP* délky *a*.
4. Sestrojíme kružnici se středem *S* a poloměrem délky *SP*.
5. Tato kružnice protne přímku *AB* v bodech *C* a *D*.
6. Poměr délek úseček *AC* a *AB* je roven zlatému řezu.

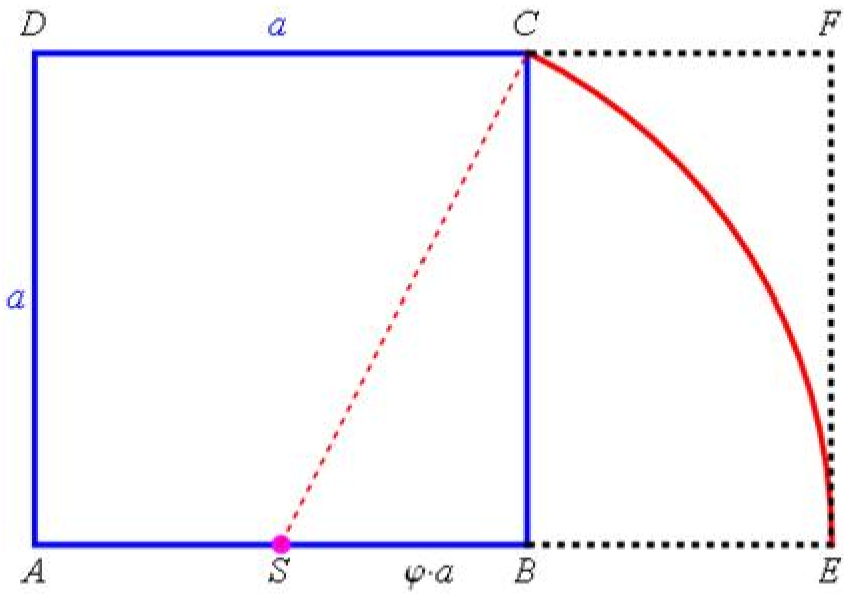
Vzhledem k tomu, že body *C* a *D* tvoří průměr sestrojené kružnice, je tato kružnice Thaletovou kružnicí. Proto je podle Thaletovy věty trojúhelník *CDP* pravoúhlý. Jeho výška *AP* na přeponu *CD* dělí tuto přeponu na dva úseky: úsek *CA* délky *x* a úsek *AD* délky *a* + *x*. Eukleidovu větu o výšce pro trojúhelník *CDP* můžeme proto psát ve tvaru $x(a+x)=a^2$; a to je vztah, který jsme získali úpravou rovnice (12) definující zlatý řez.



Obr. 27

Třetí konstrukce zlatého řezu je patrně nejjednodušší a můžeme jí sledovat podle obr. 28:

1. Sestrojíme čtverec *ABCD* o straně délky *a*.
2. Najdeme střed *S* úsečky *AB*.
3. Z bodu *S* opíšeme kružnici o poloměru rovném délce úsečky *SC*.
4. Průsečík této kružnice a polopřímky *AB* je bod *E*.
5. Z bodu *E* vztyčíme kolmici o délce *a* k polopřímce *AB*. Tak získáme bod *F*.
6. Délka úsečky *AE* je rovna φa, tj. je φ krát delší, než je délka strany čtverce *ABCD*.



Obr. 28

Zdůvodnění výše uvedené konstrukce vyplývá z Pythagorovy věty aplikované na trojúhelník *SBC*. Pro délku úsečky *SC* (tj. pro poloměr kružnice sestrojené z bodu *S*) postupně dostáváme: $|SC| = \sqrt{|SB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Uvědomíme-li si, že délky úseček *SC* a *SE* jsou navzájem stejné, pak pro délku úsečky *AE* můžeme psát: $|AE| = |AS| + |SE| = |AS| + |SC| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$. S využitím vztahu (14) tedy můžeme psát $|AE| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a = \varphi a$.

Je tedy zřejmé, že délky stran obdélníka *AEFD* jsou v poměru $\varphi a : a = \varphi : 1$. Délky stran obdélníka

BEFC jsou v poměru $a : (\varphi a - a) = 1 : (\varphi - 1) = 1 : \frac{1}{\varphi} = \varphi : 1$, přičemž předposlední krok v rovnosti poměrů byl učiněn na základě číselné vlastnosti zlatého řezu popsané vztahem (15). Oba tyto obdélníky jsou proto tzv. zlaté obdélníky.
