Číselné vlastnosti zlatého řezu

Zlatý řez má některé zajímavé matematické vlastnosti. Připomeňme, že definice zlatého řezu je založena na řešení rovnice (12), která má tvar $x^2+ax-a^2=0$ a jejíž řešení (13) pro jednotkovou délku původní úsečky (tj. pro *a* = 1) má tvar $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Zlatý řez je pak definován vztahem (14) ve tvaru $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Pro převrácenou hodnotu zlatého řezu φ platí $\frac{1}{\varphi}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}$. Po usměrnění a úpravě postupně dostáváme: $\frac{1}{\varphi}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1-5}=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Vyčíslíme-li nyní výraz $\varphi-\frac{1}{\varphi}$, dostaneme postupně $\varphi-\frac{1}{\varphi}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{2}=1$. Můžeme tedy psát vztah

$$\varphi-\frac{1}{\varphi}=1, \tag{15}$$

nebo-li platí $\frac{1}{\varphi}=\varphi-1$.

To tedy znamená, že převrácenou hodnotu zlatého řezu určíme tak, že od zlatého řezu odečteme číslo 1, tedy $\frac{1}{\varphi}=0,618033988\ldots$

Umocníme-li zlatý řez φ na druhou, postupně dostaneme $\varphi^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{2+1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Můžeme tedy psát

$$\varphi^2=1+\varphi\,. \tag{16}$$

Druhou mocninu zlatého řezu získáme tak, že ke zlatému řezu přičteme číslo 1, tj. $\varphi^2=2,618033988\ldots$

Dále platí vztah pro třetí mocninu zlatého řezu ve tvaru:

$$\varphi^3=\frac{\varphi+1}{\varphi-1}. \tag{17}$$

Důkaz tohoto tvrzení provedeme rozepsáním levé a pravé strany vztahu (17). S využitím definice zlatého řezu pomocí vztahu (14) můžeme levou stranu vztahu (17) psát postupně ve tvaru: $\varphi^3=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8}=\frac{16+8\sqrt{5}}{8}=2+\sqrt{5}$. Podobně můžeme vyjádřit pravou stranu vztahu (17) postupně ve tvaru: $\frac{\varphi+1}{\varphi-1}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}+2}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{3\sqrt{5}+3+5+\sqrt{5}}{4}=\frac{8+4\sqrt{5}}{4}=2+\sqrt{5}$. Na základě provedených výpočtů je tedy zřejmé, že vztah (17) skutečně platí.

Podívejme se nyní na nekonečný výraz sestávající ze druhých odmocnin a čísla 1, tj. na výraz $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$. Pokud budeme chtít určit jeho hodnotu, můžeme postupovat tak, že postupně budeme vyčíslovat výrazy $\sqrt{1}$, $\sqrt{1+\sqrt{1}}=\sqrt{2}$, $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}=\sqrt{1+\sqrt{2}}$, ... Jiná varianta výpočtu spočívá v označení daného výrazu a následném umocnění. Označíme-li

$$y = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}\,, \tag{18}$$

umocněním získáme: $y^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$. S využitím označení (18) získáme rovnici ve tvaru $y^2 = 1+y$, kterou můžeme přepsat do tvaru

$$y^2 - y - 1 = 0\,. \tag{19}$$

Její řešení pak můžeme psát ve tvaru

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,. \tag{20}$$

Kladný kořen $y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ je přitom roven zlatému řezu ve tvaru (14). Proto můžeme psát

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}\,. \tag{21}$$

Další nekonečný výraz představuje zlomek

$$z = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}\,. \tag{22}$$

S využitím tohoto označení (a vzhledem k nekonečnému charakteru zlomku) můžeme psát rovnici $z = 1 + \frac{1}{z}$, kterou můžeme převést do tvaru $z^2 - z - 1 = 0$. Vzhledem k tomu, že tato rovnice je totožná s rovnicí (19), má také stejné řešení. To znamená, že jsme našli další způsob zápisu zlatého řezu:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}\,. \tag{23}$$