

## Číselné vlastnosti zlatého řezu

**Zlatý řez** má některé zajímavé matematické vlastnosti. Připomeňme, že **definice zlatého řezu** je založena na řešení rovnice (12), která má tvar  $x^2 + ax - a^2 = 0$  a jejíž řešení (13) pro jednotkovou délku původní úsečky (tj. pro  $a = 1$ ) má tvar  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Zlatý řez je pak definován vztahem (14) ve tvaru  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Pro převrácenou hodnotu zlatého řezu  $\varphi$  platí  $\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$ . Po usměrnění a úpravě postupně dostáváme:  $\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ . Vyčíslíme-li nyní výraz  $\varphi - \frac{1}{\varphi}$ , dostaneme postupně  $\varphi - \frac{1}{\varphi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \left(-\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ . Můžeme tedy psát vztah

$$\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1, \quad (15)$$

nebo-li platí  $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ .

To tedy znamená, že převrácenou hodnotu zlatého řezu určíme tak, že od zlatého řezu odečteme číslo 1, tedy  $\frac{1}{\varphi} = 0,618033988\dots$

Umocníme-li zlatý řez  $\varphi$  na druhou, postupně dostaneme  $\varphi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2 + 1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Můžeme tedy psát

$$\varphi^2 = 1 + \varphi. \quad (16)$$

Druhou mocninu zlatého řezu získáme tak, že ke zlatému řezu přičteme číslo 1, tj.  $\varphi^2 = 2,618033988\dots$

Dále platí vztah pro třetí mocninu zlatého řezu ve tvaru:

$$\varphi^3 = \frac{\varphi + 1}{\varphi - 1}. \quad (17)$$

Důkaz tohoto tvrzení provedeme rozepsáním levé a pravé strany vztahu (17). S využitím definice zlatého řezu pomocí vztahu (14) můžeme levou stranu vztahu (17) psát postupně ve tvaru:

$$\varphi^3 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5}}{8} = \frac{16 + 8\sqrt{5}}{8} = 2 + \sqrt{5}. \text{ Podobně můžeme vyjádřit pravou stranu vztahu (17)}$$

$$\text{postupně ve tvaru: } \frac{\varphi + 1}{\varphi - 1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{5} + 2}{2}}{\frac{1 + \sqrt{5} - 2}{2}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{3\sqrt{5} + 3 + 5 + \sqrt{5}}{4} = \frac{8 + 4\sqrt{5}}{4} = 2 + \sqrt{5}. \text{ Na}$$

základě provedených výpočtů je tedy zřejmé, že vztah (17) skutečně platí.

Podívejme se nyní na nekonečný výraz sestávající ze druhých odmocnin a čísla 1, tj. na výraz  $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$ . Pokud budeme chtít určit jeho hodnotu, můžeme postupovat tak, že postupně budeme vyčíslovat výrazy  $\sqrt{1}$ ,  $\sqrt{1 + \sqrt{1}} = \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ , ... Jiná varianta výpočtu

spočívá v označení daného výrazu a následném umocnění. Označíme-li

$$y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}} \quad (18)$$

umocněním získáme:  $y^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$ . S využitím označení (18) získáme rovnici ve tvaru  $y^2 = 1 + y$ , kterou můžeme přepsat do tvaru

$$y^2 - y - 1 = 0. \quad (19)$$

Její řešení pak můžeme psát ve tvaru

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (20)$$

Kladný kořen  $y_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  je přitom roven zlatému řezu ve tvaru (14). Proto můžeme psát

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}} \quad (21)$$

Další nekonečný výraz představuje zlomek

$$z = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (22)$$

S využitím tohoto označení (a vzhledem k nekonečnému charakteru zlomku) můžeme psát rovnici  $z = 1 + \frac{1}{z}$ , kterou můžeme převést do tvaru  $z^2 - z - 1 = 0$ . Vzhledem k tomu, že tato rovnice je totožná s rovnicí (19), má také stejné řešení. To znamená, že jsme našli další způsob zápisu zlatého řezu:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (23)$$