

Zlatý řez a pětiúhelník

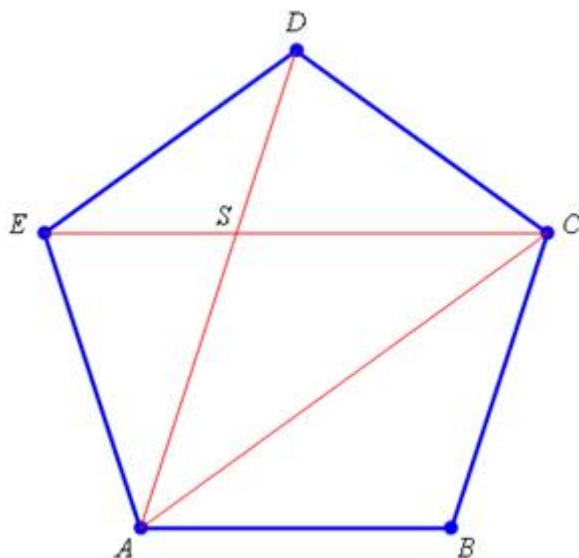
[Poměr zlatého řezu](#) se vyskytuje také v souvislosti s pravidelným pětiúhelníkem. Zájem řeckých matematiků o zlatý řez velmi pravděpodobně souvisel s tím, že pravidelný pětiúhelník byl pro [Pythagorejce](#) posvátným symbolem. Sestrojení pravidelného trojúhelníka, čtyřúhelníka, šestiúhelníka bylo velmi snadné; sestavit pravidelný pětiúhelník se ale nedařilo. Pravidelný pětiúhelník se podařilo sestavit až po objevení zlatého řezu.

Nejdříve se podíváme, jak souvisí zlatý řez s pravidelným pětiúhelníkem. Uvažujme pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, ve kterém sestrojíme tři jeho úhlopříčky (viz obr. 29). Úhlopříčky AD a CE se přitom protínají v bodě S . Trojúhelník ABC je rovnoramenný (strany AB a BC trojúhelníka jsou také strany pravidelného pětiúhelníka) a tedy těžnice na jeho základnu AC je zároveň výškou na tuto stranu. Trojúhelník ASC je s trojúhelníkem ABC shodný, proto rovnoběžník $ABCS$ je kosočtverec.

Vzhledem ke shodnosti obou trojúhelníků, které jej tvoří, má rovnoběžník $ABSC$ všechny čtyři strany stejně dlouhé. Navíc výšky na základy trojúhelníků ABC a ASC leží na téže přímce, která navíc půlí stranu AC (výška na základnu je v rovnoramenném trojúhelníku současně těžnicí). Proto je rovnoběžník $ABSC$ kosočtverec

Trojúhelníky ABC a ESD jsou podobné, a proto platí: $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|ED|}{|ES|}$. Úhlopříčky AC a EC jsou navzájem stejně dlouhé a úsečky AB , CS a ED jsou navzájem také stejně dlouhé. Proto můžeme poměr $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|ED|}{|ES|}$ psát ve tvaru $\frac{|EC|}{|CS|} = \frac{|CS|}{|ES|}$. Tento poměr je shodný s poměrem určující [definici zlatého řezu](#). Proto bod S dělí úhlopříčku EC v poměru zlatého řezu, tj. platí

$$\frac{|EC|}{|CS|} = \varphi. \quad (24)$$



Obr. 30

Nyní již byla konstrukce pravidelného pětiúhelníka snadná:

1. Sestrojíme úsečku EC .
2. Pomocí [konstrukce zlatého řezu](#) najdeme bod S .
3. Z bodu C opíšeme kružnici k o poloměru rovném délce úsečky EC .
4. Z bodu E opíšeme kružnici l o poloměru rovném délce úsečky CS (tj. rovné délce strany pravidelného pětiúhelníka).

5. Na průsečíku [kružnic](#) k a l leží vrchol A hledaného pětiúhelníka.
6. Z bodů A a C sestrojíme kružnice o poloměru rovném délce úsečky CS a na jejich průsečíku získáme vrchol B pětiúhelníka.
7. Z bodů E a C sestrojíme kružnice o poloměru rovném délce úsečky CS a na jejich průsečíku získáme vrchol D pětiúhelníka.

Zakreslíme-li do pravidelného pětiúhelníka dvě sousední úhlopříčky, získáme tři rovnoramenné trojúhelníky (viz obr. 30). Vnitřní úhly u základny rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné, a proto mají vnitřní úhly trojúhelníka ABD hodnoty 72° , 72° a 36° .

Tyto hodnoty můžeme získat, pokud si uvědomíme, že jeden vnitřní úhel pravidelného pětiúhelníka je $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. Úhel 72° je pak vedlejší úhel k úhlu 108° .

Při odvozování dělicího poměru úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka jsme zjistili tyto vlastnosti:

1. délka strany pravidelného pětiúhelníka AB je stejná jako délka delší části CS úhlopříčky EC ;
2. úhlopříčka pravidelného pětiúhelníka je další jeho úhlopříčkou rozdělena v poměru zlatého řezu, tj. platí vztah (24).

Proto nyní můžeme psát

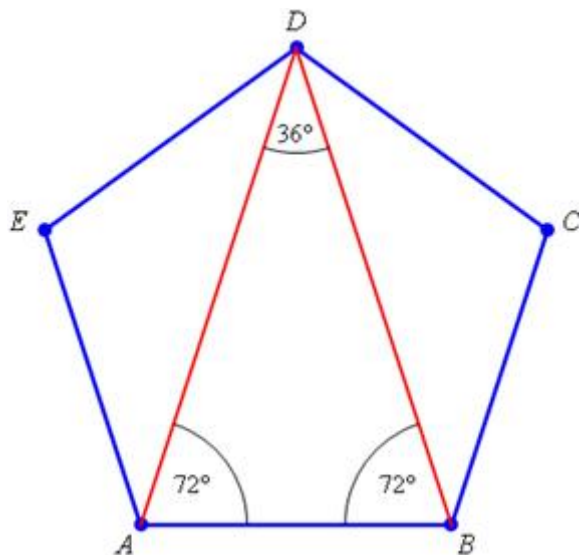
$$\frac{|AD|}{|AB|} = \varphi, \quad (25)$$

tj. délka strany pravidelného pětiúhelníka dělí jeho úhlopříčku v poměru zlatého řezu.

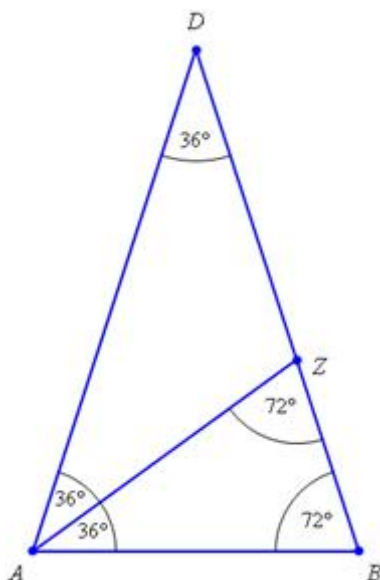
Strana AD trojúhelníka ABD leží na úhlopříčce pravidelného pětiúhelníka a strana AB uvažovaného trojúhelníka tvoří stranu pravidelného pětiúhelníka.

Trojúhelník, ve kterém platí vztah (25), se nazývá **zlatý trojúhelník**.

ROVNORAMENNÝ TROJÚHELNÍK S POMĚREM DÉLKY RAMENA K DÉLCE ZÁKLADNY V HODNOTĚ ZLATÉHO ŘEZU SE NAZÝVÁ ZLATÝ TROJÚHELNÍK.



Obr. 31

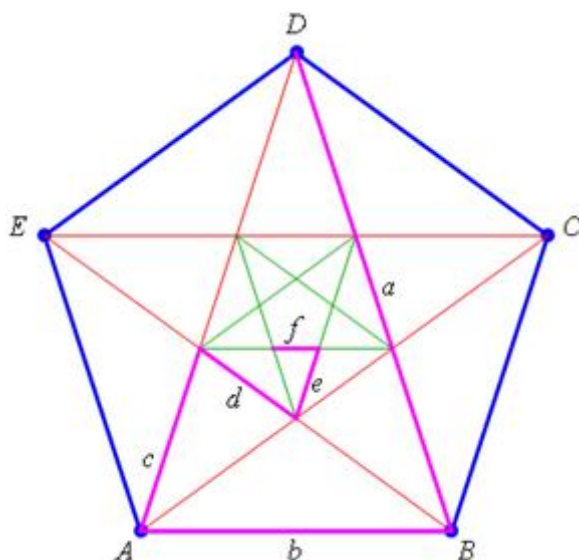


Obr. 32

Rozpůlíme-li úhel při vrcholu A v trojúhelníku ABD (zobrazeném na obr. 30), získáme na průsečíku právě sestrojeného ramene úhlu a úsečky BD bod Z (viz obr. 31). Trojúhelníky ABD a BZA jsou podobné a navíc platí poměr $\frac{|BD|}{|ZA|} = \frac{|AB|}{|BZ|}$. Vzhledem k tomu, že délky úseček AB, ZA a DZ jsou navzájem shodné, můžeme uvedený poměr psát ve tvaru $\frac{|BD|}{|DZ|} = \frac{|DZ|}{|BZ|}$, který odpovídá definici zlatého řezu. Bod Z tedy dělí úsečku BD v poměru zlatého řezu, tj. platí $\frac{|BD|}{|DZ|} = \varphi$.

S využitím právě uvedených vlastností pravidelného pětiúhelníka můžeme nyní upozornit na další vlastnosti. Spojením všech vrcholů úhlopříčkami získáme pentagram (viz obr. 32), který sehrál v dějinách lidstva a zejména v dějinách náboženství důležitou úlohu. Tyto úhlopříčky navíc vytvoří další pětiúhelník a jeho úhlopříčky opět pentagram. Tímto způsobem bychom mohli pokračovat stále dále. Nápadnou vlastností, která vyplývá z výše uvedeného, je poměr úseček a, b, c, d, e a f. Pro tyto úsečky totiž platí poměr

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f} = \varphi. \quad (26)$$



Na základě platnosti poměru (26) a na základě skutečnosti, že uvedený postup vytváření stále menších pravidelných pětiúhelníků a pentagramů lze opakovat do nekonečna, lze také dokázat nesouměřitelnost úseček o délce a a b . Jinými slovy: délka úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka a délka jeho strany jsou navzájem nesouměřitelné, tj. jejich poměr není vyjádřit poměrem dvou přirozených čísel; jejich poměr je roven zlatému řezu, což je iracionální číslo.

© **Encyklopedie Fyziky** (<http://fyzika.jreichl.com>); **Jaroslav Reichl, Martin Všeticka**

Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.