Zlatý řez a pětiúhelník

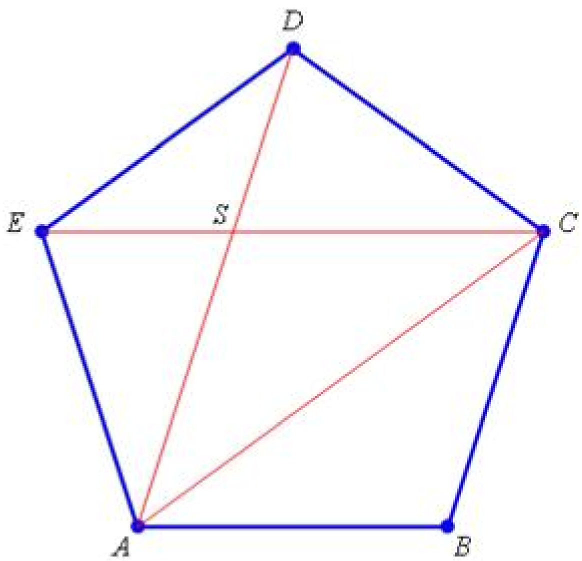
Poměr zlatého řezu se vyskytuje také v souvislosti s pravidelným pětiúhelníkem. Zájem řeckých matematiků o zlatý řez velmi pravděpodobně souvisel s tím, že pravidelný pětiúhelník byl pro Pythagorejce posvátným symbolem. Sestrojení pravidelného trojúhelníka, čtyřúhelníka, šestiúhelníka bylo velmi snadné; sestrojit pravidelný pětiúhelník se ale nedařilo. Pravidelný pětiúhelník se podařilo sestrojit až po objevení zlatého řezu.

Nejdříve se podíváme, jak souvisí zlatý řez s pravidelným pětiúhelníkem. Uvažujme pravidelný pětiúhelník *ABCDE*, ve kterém sestrojíme tři jeho úhlopříčky (viz obr. 29). Úhlopříčky *AD* a *CE* se přitom protínají v bodě *S*. Trojúhelník *ABC* je rovnoramenný (strany *AB* a *BC* trojúhelníka jsou také strany pravidelného pětiúhelníka) a tedy těžnice na jeho základnu *AC* je zároveň výškou na tuto stranu. Trojúhelník *ASC* je s trojúhelníkem *ABC* shodný, proto rovnoběžník *ABCS* je kosočtverec.

Vzhledem ke shodnosti obou trojúhelníků, které jej tvoří, má rovnoběžník *ABSC* všechny čtyři strany stejně dlouhé. Navíc výšky na základy trojúhelníků *ABC* a *ASC* leží na téže přímce, která navíc půlí stranu *AC* (výška na základu je v rovnoramenném trojúhelníku současně těžnicí). Proto je rovnoběžník *ABSC* kosočtverec

Trojúhelníky *ABC* a *ESD* jsou podobné, a proto platí: $\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{|ED|}{|ES|}$. Úhlopříčky *AC* a *EC* jsou navzájem stejně dlouhé a úsečky *AB*, *CS* a *ED* jsou navzájem také stejně dlouhé. Proto můžeme poměr $\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{|ED|}{|ES|}$ psát ve tvaru $\frac{|EC|}{|CS|}=\frac{|CS|}{|ES|}$. Tento poměr je shodný s poměrem určující definici zlatého řezu. Proto bod *S* dělí úhlopříčku *EC* v poměru zlatého řezu, tj. platí

$$\frac{|EC|}{|CS|}=\varphi\,. \tag{24}$$



Obr. 30

Nyní již byla konstrukce pravidelného pětiúhelníka snadná:

1. Sestrojíme úsečku *EC*.
2. Pomocí konstrukce zlatého řezu najdeme bod *S*.
3. Z bodu *C* opíšeme kružnici *k* o poloměru rovném délce úsečky *EC*.
4. Z bodu *E* opíšeme kružnici *l* o poloměru rovném délce úsečky *CS* (tj. rovné délce strany pravidelného pětiúhelníka).

5. Na průsečíku kružnic *k* a *l* leží vrchol *A* hledaného pětiúhelníka.
6. Z bodů *A* a *C* sestrojíme kružnice o poloměru rovném délce úsečky *CS* a na jejich průsečíku získáme vrchol *B* pětiúhelníka.
7. Z bodů *E* a *C* sestrojíme kružnice o poloměru rovném délce úsečky *CS* a na jejich průsečíku získáme vrchol *D* pětiúhelníka.

Zakreslíme-li do pravidelného pětiúhelníku dvě sousední úhlopříčky, získáme tři rovnoramenné trojúhelníky (viz obr. 30). Vnitřní úhly u základny rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné, a proto mají vnitřní úhly trojúhelníka *ABD* hodnoty $72°$, $72°$ a $36°$.

Tyto hodnoty můžeme získat, pokud si uvědomíme, že jeden vnitřní úhel pravidelného pětiúhelníka je $\frac{540°}{5} = 108°$. Úhel $72°$ je pak vedlejší úhel k úhlu $108°$.

Při odvozování dělícího poměru úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka jsme zjistili tyto vlastnosti:

1. délka strany pravidelného pětiúhelníka *AB* je stejná jako délka delší části *CS* úhlopříčky *EC*;
2. úhlopříčka pravidelného pětiúhelníka je další jeho úhlopříčkou rozdělena v poměru zlatého řezu, tj. platí vztah (24).

Proto nyní můžeme psát

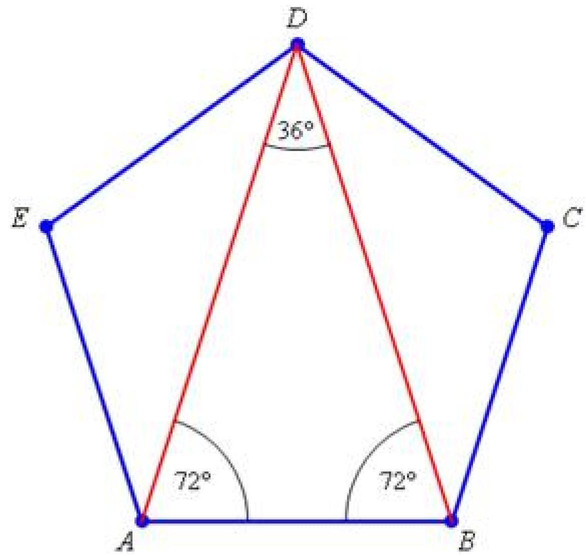
$$\frac{|AD|}{|AB|} = \varphi, \qquad (25)$$

tj. délka strany pravidelného pětiúhelníka dělí jeho úhlopříčku v poměru zlatého řezu.

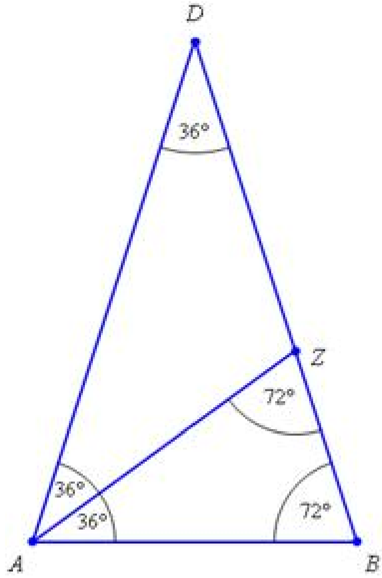
Strana *AD* trojúhelníka *ABD* leží na úhlopříčce pravidelného pětiúhelníka a strana *AB* uvažovaného trojúhelníka tvoří stranu pravidelného pětiúhelníka.

Trojúhelník, ve kterém platí vztah (25), se nazývá **zlatý trojúhelník**.

ROVNORAMENNÝ TROJÚHELNÍK S POMĚREM DÉLKY RAMENA K DÉLCE ZÁKLADNY V HODNOTĚ ZLATÉHO ŘEZU SE NAZÝVÁ ZLATÝ TROJÚHELNÍK.



Obr. 31

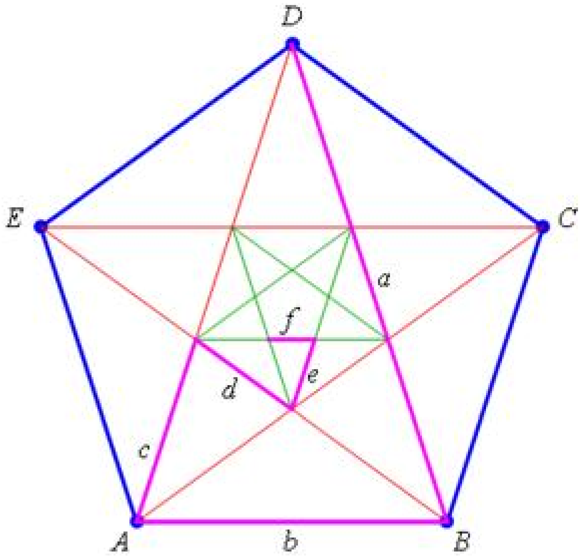


Obr. 32

Rozpůlíme-li úhel při vrcholu A v trojúhelníku ABD (zobrazeném na obr. 30), získáme na průsečíku právě sestrojeného ramene úhlu a úsečky BD bod Z (viz obr. 31). Trojúhelníky ABD a BZA jsou podobné a navíc platí poměr $\frac{|BD|}{|ZA|} = \frac{|AB|}{|BZ|}$. Vzhledem k tomu, že délky úseček AB, ZA a DZ jsou navzájem shodné, můžeme uvedený poměr psát ve tvaru $\frac{|BD|}{|DZ|} = \frac{|DZ|}{|BZ|}$, který odpovídá definici zlatého řezu. Bod Z tedy dělí úsečku BD v poměru zlatého řezu, tj. platí $\frac{|BD|}{|DZ|} = \varphi$.

S využitím právě uvedených vlastností pravidelného pětiúhelníka můžeme nyní upozornit na další vlastnosti. Spojením všech vrcholů úhlopříčkami získáme pentagram (viz obr. 32), který sehrál v dějinách lidstva a zejména v dějinách náboženství důležitou úlohu. Tyto úhlopříčky navíc vytvoří další pětiúhelník a jeho úhlopříčky opět pentagram. Tímto způsobem bychom mohli pokračovat stále dále. Nápadnou vlastností, která vyplývá z výše uvedeného, je poměr úseček a, b, c, d, e a f. Pro tyto úsečky totiž platí poměr

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f} = \varphi . \tag{26}$$



Obr. 33

Na základě platnosti poměru (26) a na základě skutečnosti, že uvedený postup vytváření stále menších pravidelných pětiúhelníků a pentagramů lze opakovat do nekonečna, lze také dokázat nesouměřitelnost úseček o délce *a* a *b*. Jinými slovy: délka úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka a délka jeho strany jsou navzájem nesouměřitelné, tj. jejich poměr není vyjádřit poměrem dvou přirozených čísel; jejich poměr je roven zlatému řezu, což je iracionální číslo.