Fibonacciho posloupnost a zlatý řez

Zajímavou vlastnost Fibonacciho posloupnosti zjistil Johannes Kepler (1571 - 1630) a ne zcela obecně pak prokázal skotský matematik Robert Simon (1687 - 1768). Jedná se o úzký vztah členů Fibonacciho posloupnosti a zlatého řezu.

V tab. 1 jsou zobrazeny poměry dvou po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti. Tyto poměry jsou zobrazeny na více desetinných míst, aby bylo zřejmé, jak se mění jejich hodnota. Uvedený poměr se pro rostoucí členy Fibonacciho posloupnosti stále více blíží poměru zlatého řezu.

$$\frac{1}{1} = 1.0000000$$
$$\frac{2}{1} = 2.0000000$$
$$\frac{3}{2} = 1.5000000$$
$$\frac{5}{3} = 1.6666667$$
$$\frac{8}{5} = 1.6000000$$
$$\frac{13}{8} = 1.6250000$$
$$\frac{21}{13} = 1.6153846$$
$$\frac{34}{21} = 1.6190476$$
$$\frac{55}{34} = 1.6176471$$
$$\frac{89}{55} = 1.6181818$$
$$\frac{144}{89} = 1.6179775$$
$$\frac{233}{144} = 1.6180556$$
$$\frac{377}{233} = 1.6180258$$
$$\frac{610}{377} = 1.6180371$$
$$\frac{987}{610} = 1.6180328$$

tab. 1

Tuto skutečnost je možné dokázat s využitím vztahu (4), který lze považovat za definici Fibonacciho posloupnosti (resp. za definiční vztah *n*-tého členu Fibonacciho posloupnosti). Poměr, který nás zajímá, můžeme psát ve tvaru $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$. Dosadíme-li do tohoto výrazu z definičního vztahu Fibonacciho posloupnosti (4), dostaneme $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1+1}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}$. Tento výraz nyní budeme postupně upravovat: $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}\right)}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}$.

Vzhledem k tomu, že $1-\sqrt{5}<1+\sqrt{5}$, je $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$ a tedy $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}=0$. Proto platí $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}\right)}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$, kde φ představuje poměr zlatého řezu.

Zlatý řez φ lze zapsat jako nekonečný řetězový zlomek ve tvaru

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}} \, . \qquad (7)$$

Hodnotu φ můžeme také určit řadou postupných aproximací a tyto aproximace jsou totožné s poměry dvou po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti:

$$1 = 1{,}00000$$

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2{,}00000$$

$$1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1{,}50000$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}} = \frac{5}{3} = 1{,}66666$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}} = \frac{8}{5} = 1{,}60000$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}} = \frac{13}{8} = 1{,}62500$$

Tato vlastnost (tj. souvislost zlatého řezu a Fibonacciho posloupnosti) je popsána v knize *On Growth and Form* (*O růstu a tvaru*) slavného přírodovědce D’Arcyho Wentwortha Thompsona (1860 - 1948)

Zlatý řez získáme také z poměru dvou po sobě jdoucích členů libovolné posloupnosti, která je definovaná rekurentním vztahem (1), tj. tak, že každý další člen je roven součtu předchozích dvou členů. Je ovšem nutné brát v úvahu poměr dvou po sobě jdoucích členů, které jsou dostatečně vzdálené od začátku posloupnosti.

Je to přesně analogie výše vypočtené limity.