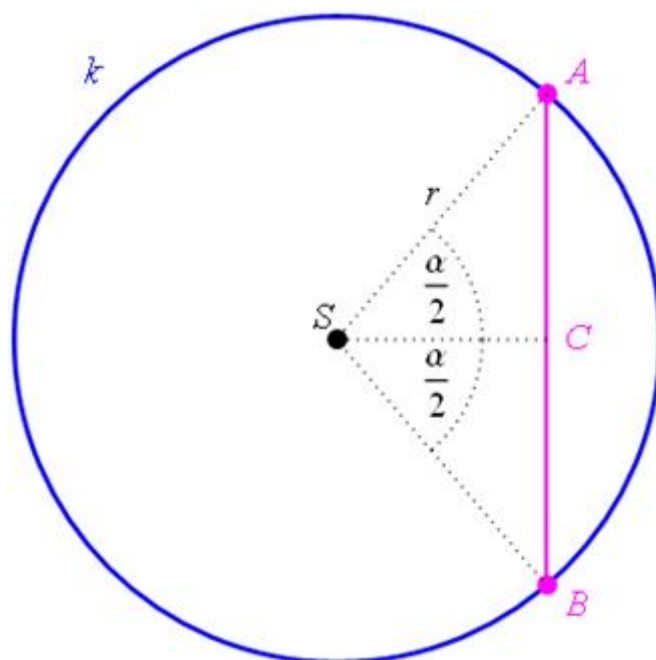


## Řecké tětivy a Klaudios Ptolemaios

Nejranější doklady o používání goniometrických funkcí patří do starověkého Řecka. [Řecká matematika](#) místo goniometrických funkcí používaných v současnosti pracovala s délkou tětivy [kružnice](#). Tětiva  $AB$  kružnice  $k$  o poloměru  $r$  je dána středovým úhlem  $\alpha$  a její délka se značila  $\text{crd}\alpha$ . Podle obr. 131 je zřejmé, že současně používaná funkce sinus je vlastně polovina délky tětivy příslušející dvojnásobnému úhlu vydělená poloměrem  $r$ . Platí tedy vztah

$$\text{crd}\alpha = 2r \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$



Obr. 131

Délky tětiv byly podstatné pro [astronomii](#). Jako první sestavil jejich tabulky významný řecký astronom [Hipparchos](#). Jeho dílo se ovšem dochovalo pouze částečně; o jeho přínosu rozvoji počítání s délkami tětiv svědčí zejména svědectví později žijících autorů.

Na Hipparchovo dílo vědomě navázal zejména Klaudios [Ptolemaios](#), který ve svém díle Hipparcha několikrát zmiňuje. Na základě Ptolemaiova díla je možné usuzovat, že Hipparchos hodnoty délek tětiv dané vztahem (2) opravdu znal a používal je při studiu [pohybu Měsíce](#) kolem [Země](#).

Myšlenka zavedení délek tětiv pochází pravděpodobně přímo od Hipparcha. Délky tětiv byly později nahrazeny polovičními délkami, což odpovídalo současně používané funkci sinus. Poprvé je to zdokumentováno u indického matematika [Árjabhaty](#).

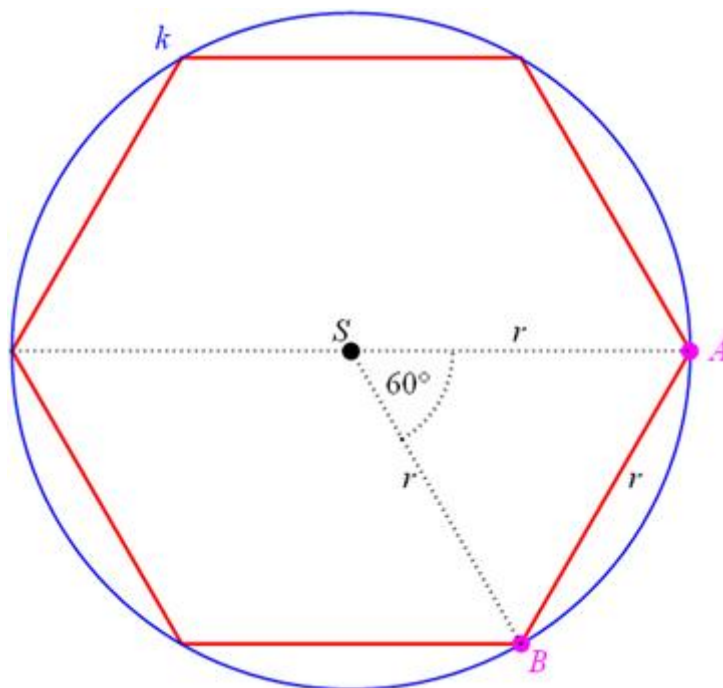
Ptolemaios vypracoval tabulky délek tětiv, které jsou uvedeny v jeho slavném díle *Almagest*. Jedná se o nejstarší dochované tabulky tohoto typu. V e svém díle je pak používá k řadě astronomických výpočtů. Ptolemaios neuvádí pouze výsledky, ale také návod na jejich sestavení.

Základy [goniometrie](#) publikoval Ptolemaios v první knize svého stěžejního díla *Almagest*. Pracuje zde s délkami tětiv, ze kterých později vznikly goniometrické funkce tak, jak je známe v současnosti. Při svých výpočtech Ptolemaios používá dělení kružnice na 360 stupňů, které používali staří Babyloňané, a výpočty provádí v šedesátkové [číselné soustavě](#). Průměr kružnice dělí na 120 stejně dlouhých částí, a proto tedy uvažuje kružnici o poloměru 60 [jednotek](#). Vzhledem

k tomu, že délka strany  $AB$  pravidelného šestiúhelníka je stejná, jako je poloměr kružnice  $r$  tomuto šestiúhelníku opsané (viz obr. 132), můžeme psát základní poznatek, ze kterého Ptolemaios dále vychází, ve tvaru

$$\text{crd } 60^\circ = 60. \quad (3)$$

Délka tětivy odpovídající středovému úhlu  $60^\circ$  je 60 jednotek. Délka tětivy je v tomto případě stejná jako je poloměr kružnice opsané šestiúhelníku. A tato kružnice má (dle Ptolemaiova značení) průměr 120 jednotek; její poloměr je tedy 60 jednotek.



Obr. 132

Na základě těchto předpokladů pak odvozuje několik vět, které jsou teoretickým základem výpočtu délek tětiv příslušných středovým úhlům s hodnotami od  $0^\circ$  do  $180^\circ$  s krokem  $0,5^\circ$ . Teorie, ze které postup tvorby tabulek tětiv vychází, je rozdělen do šesti základních kroků. Všechny věty, na kterých jsou výpočty založeny, Ptolemaios pečlivě dokazuje.

1. Nejdříve určí hodnoty  $\text{crd } 72^\circ$  a  $\text{crd } 36^\circ$  na základě geometrické konstrukce pravidelného [pětiúhelníku](#) a desetiúhelníku a s využitím [Pythagorovy věty](#).
2. Pomocí [Ptolemaiovy věty](#) určující vztah mezi délkami stran a délkami úhlopříček [tětivového čtyřúhelníku](#) odvozuje součtový vzorec.
3. Na základě vztahu pro  $\text{crd}(\alpha - \beta)$  určuje  $\text{crd } 12^\circ$ .
4. Pomocí vztahu pro  $\text{crd} \frac{\alpha}{2}$  určuje  $\text{crd } 6^\circ$ ,  $\text{crd } 3^\circ$ ,  $\text{crd} \frac{3^\circ}{2}$  a  $\text{crd} \frac{3^\circ}{4}$ .
5. Provede kvalitní odhad pro  $\text{crd } 1^\circ$  a pomocí toho určí  $\text{crd} \frac{1^\circ}{2}$ .
6. S pomocí odvozených vztahů sestavuje tabulky délek tětiv s krokem  $0,5^\circ$ .

Základem hledání odhadu pro  $\text{crd } 1^\circ$  je nerovnost platící pro všechny úhly  $\alpha$  a  $\beta$  z intervalu  $(0^\circ; 180^\circ)$  taková, že  $\alpha < \beta$ :

$$\frac{\text{crd } \alpha}{\text{crd } \beta} > \frac{\alpha}{\beta}; \quad (4)$$

tuto nerovnost používali už [Aristarchos](#), [Eukleides](#) a [Archimédes](#). Nerovnost (4) lze psát v ekvivalentním tvaru

$$\frac{\text{crd } \alpha}{\alpha} > \frac{\text{crd } \beta}{\beta}. \quad (5)$$

Matematická úprava nerovnosti (4) je v pořádku, protože jak oba úhly, tak funkce  $\text{crd } x$  (tj. délka tětivy kružnice) jsou kladné.

Nerovnost ve tvaru (5) je poměrně názorná: větší oblouk se od příslušné tětivy liší více, než je tomu u menšího oblouku.

Nerovnost (5) pak Ptolemaios aplikoval na již známé hodnoty délek tětiv  $\text{crd } \frac{3^\circ}{2}$  a  $\text{crd } \frac{3^\circ}{4}$  a získal

tak nerovnost  $\frac{\text{crd } \frac{3^\circ}{2}}{\frac{3^\circ}{2}} < \frac{\text{crd } 1^\circ}{1^\circ} < \frac{\text{crd } \frac{3^\circ}{4}}{\frac{3^\circ}{4}}$ , na základě které určil hodnotu  $\text{crd } 1^\circ$ . Ptolemaiem určená

hodnota byla velmi přesná ve srovnání s dnešní hodnotou.

V Ptolemaiových tabulkách je navíc uveden sloupec, který obsahuje interpolační údaje. Konkrétně je u každého úhlu  $\alpha$  uvedena hodnota  $\frac{\text{crd}(\alpha + 0,5^\circ) - \text{crd } \alpha}{30}$ . Hodnoty délek tětiv, které jsou v tabulce uvedené bezprostředně po sobě, jsou vyděleny číslem 30. Tyto bezprostředně sousedící tětivy přitom přísluší úhlům, které se liší o  $0,5^\circ$ . Dělení třiceti tedy odpovídá v tomto případě naší jedné úhlové minutě.

Dělení třiceti je v šedesátkové soustavě, v níž Ptolemaios počítal, jednoduché: číslo, které chceme dělit třiceti, vynásobíme dvěma a ve výsledku posuneme desetinnou čárku o jedno místo vlevo.

Tento interpolační údaj umožňuje rozšířit tabulky alespoň přibližnými hodnotami délek tětiv počítanými s krokem jedné úhlové minuty.