Al-Káší a jeho přínos

V Samarkandu, kde žil i Uzbek **DŽEMÍD AL-KÁŠÍ** (cca 1350 - 1436), byla ve 20. letech 15. století založena astronomická observatoř vybavená nejlepšími optickými přístroji své doby. Tam byly také pro potřeby astronomů sestaveny přesné astronomické tabulky *Zídž Guragání*, které obsahovaly i tabulky sinů - v tomto případě s krokem jedné úhlové minuty. V těchto tabulkách byly také tabulky tangent; obojí tabulky byly vypočteny s přesností na 5 šedesátinných míst.

Al-Káší popisuje v dopise *Rísalat al-watar wal-Džajb* (*Dopis o tětivě a sinu*) přibližně z roku 1400, jak získat jiným způsobem než Ptolemaiovým postupem hodnotu $\mathrm{Sin}\,1°$. Ptolemaiův postup lze totiž zpřesňovat jen velmi obtížně. Al-Káší přišel se zcela odlišným postupem, než jaký navrhl Abú'l-Wafá', jehož postup navazoval ještě na Ptolemaiův postup.

Původní al-Kašího práce je sice ztracena, ale jeho postup je dochován např. v komentáři k astronomickým tabulkám *Pravidla operací a oprava tabulek*, který sepsal **MARJÁN ČELEBÍ** kolem roku 1500. Čelebího dědeček byl astronom a matematik **QÁDÍ ZÁDA AL-RÚMÍ** (1364 - 1436) a pracoval v Samarkandu podobně jako al-Káší. Sepsal *Traktát o určení sinu jednoho stupně*, ve kterém je vyložen al-Kášího postup výpočtu.

V době, ve které žil al-Káší, byla dobře známa hodnota $\mathrm{Sin}\,3°$; funkce $y = \mathrm{Sin}\,x$ je přitom definována vztahem (6). V dalším textu bude uveden al-Kášího postup, ale bude přepsán do současného zápisu s využitím v současné době používaného sinu. Al-Káší vychází z tehdy známého vztahu

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\,, \tag{9}$$

do kterého dosazuje $\alpha = 1°$. Za neznámou (v tehdejší terminologii *věc*) považuje přitom $\sin 1°$, čímž problém převádí na řešení kubické rovnice

$$\sin 3° = 3x - 4x^3 \tag{10}$$

s neznámou $x = \sin 1°$. Jedná se vlastně o problém trisekce úhlu, jehož přeformulování na kubickou rovnici (tj. na rovnici třetího stupně) se podařilo již v 11. století. Rovnici (8) Al-Káší píše ve tvaru $3x = 4x^3 + \sin 3°$, z níž vyjadřuje

$$x = \frac{4x^3 + \sin 3°}{3}\,. \tag{11}$$

Rovnice (9) tvoří základ iteračního předpisu, kterou tuto rovnici řeší. Iterační předpis tak má tvar

$$x_{n+1} = \frac{4x_n^3 + \sin 3°}{3}\,, \text{ kde } x_0 = \frac{1}{60}\,. \tag{12}$$

Přesněji řečeno Al-Káší hledá řešení ve tvaru $x = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_9$, ve kterém jednotlivá a_i pro

$i = 1, 2, \ldots, 9$ reprezentují jednotlivé cifry zapsané v šedesátkové číselné soustavě vydělené příslušnou mocninou čísla 60.

Po devíti provedených iteracích obdržel hodnotu $\sin 1°$ s přesností na sedm šedesátinných míst, čímž dosáhl do té doby nevídané přesnosti. Tento postup má (na rozdíl od Ptolemaiova postupu a dalších postupů z něj vycházejících) tu výhodu, že stačí znát dostatečně přesně hodnotu $\sin 3°$ a poté již získáme po několika iteracích hodnotu $\sin 1°$ s požadovanou přesností.