Mocninné řady a řetězové zlomky

Objev diferenciálního počtu a integrálního počtu přinesl zcela nové možnosti výpočtu hodnot goniometrických funkcí. Rozvoje některých funkcí byly sice známy ještě před objevem diferenciálního počtu, ale diferenciální počet přinesl možnost celkového utřídění těchto poznatků a začala se také zkoumat konvergence takto vytvořených řad.

Rozvojem funkce je myšlen zápis dané funkce pomocí zlomků, které mají „speciální tvar“. Tyto rozvoje byly důležité zejména v době, kdy nebyla k dispozici výpočetní technika a veškeré výpočty bylo nutné provádět manuálně. Tyto rozvoje ale přitom musely být vymyšleny tak, aby se s nimi dobře pracovalo (jednotlivé členy mají určitou logiku, jak se vytvářejí), ale zároveň tento rozvoj musel danou funkci pokud možno přesně nahrazovat. Odlišnost funkční hodnoty rozvoje dané funkce a samotné funkce musela být v daném bodě a jeho okolí velmi malá. A tyto odlišnosti dokázal precizně popsat až diferenciální počet.

Nejvíce se používají tzv. Taylorovy rozvoje funkcí do mocninných řad. Tak např. funkci sinus lze tímto způsobem psát ve tvaru:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots . \qquad (13)$$

Řada (13) velmi rychle konverguje pro *x* blízká nule. Proto se tento typ řad používá v praxi. Počítají-li se např. hodnoty goniometrických funkcí na kalkulačkách, počítají se vždy podle nějaké mocninné řady. Ty jsou nekonečné, ale pro dostatečnou přesnost výpočtu postačuje prvních několik (několik desítek) členů. Pro zpřesnění výpočtů je navíc základní interval rozdělen na menší podintervaly a pro každý z nich je v paměti kalkulačky uložen speciální typ mocninné řady.

Kromě mocninných řad se ale také používají tzv. řetězové zlomky; řetězový zlomek pro funkci tangens je výrazně jednodušší, než je příslušná mocninná řada pro tuto funkci. Řetězový zlomek pro funkci tangens lze psát ve tvaru

$$\mathrm{tg}\, x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \ldots}}}}} . \qquad (14)$$

Rozvoje do řetězových zlomků jsou numericky výhodnější, protože v řadě případů konvergují rychleji než mocninné řady.