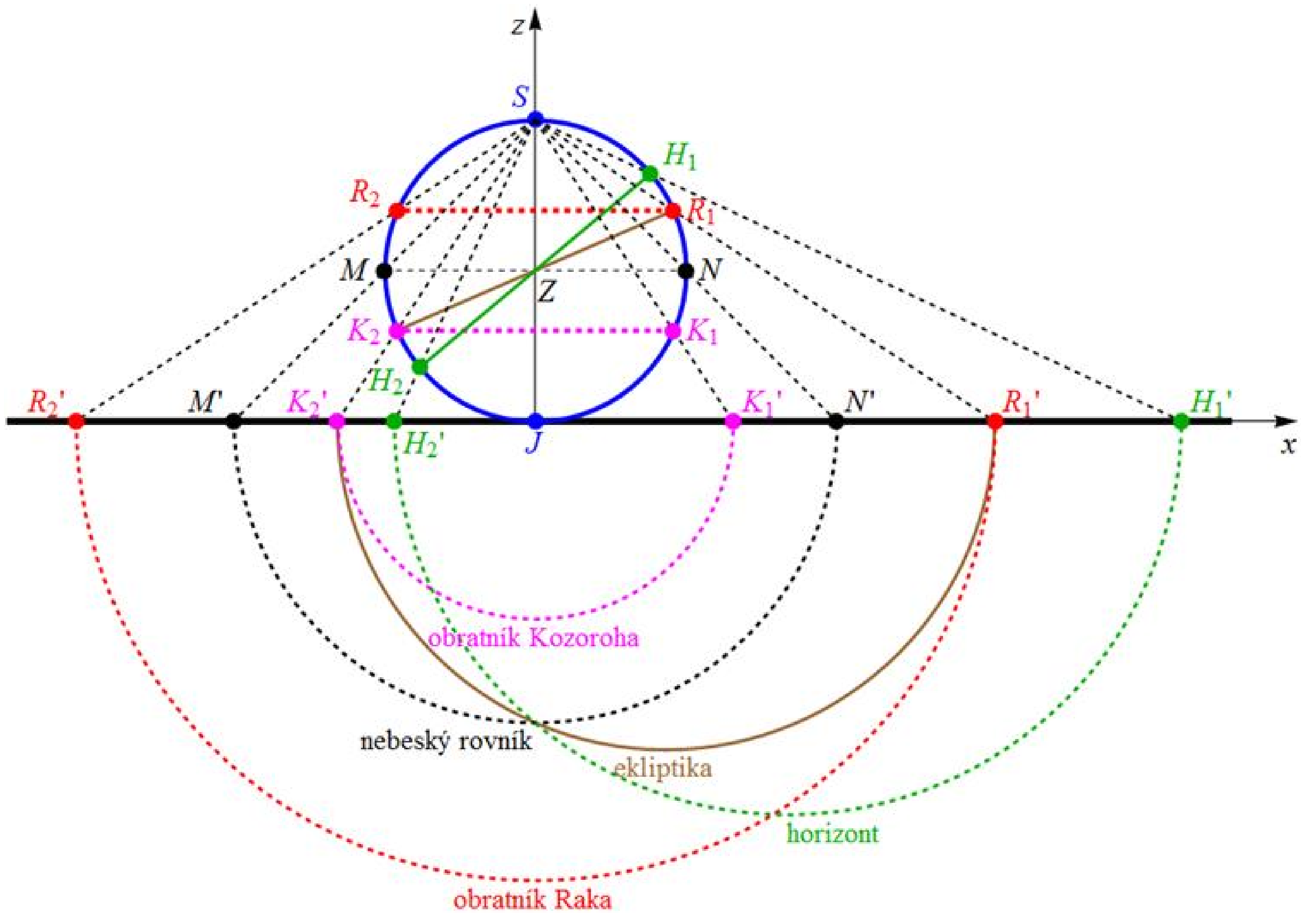
Stereografická projekce

Při návrhu astronomického ciferníku pražského orloje byla použita stereografická projekce nebeské sféry na rovinu. V případě pražského orloje si nebeskou sféru představíme jako kulovou plochu o poměru *r*. Střed promítání *S* je umístěn v severním pólu sféry a projekční plocha je k této sféře tečnou rovinou procházející bodem *J*, tj. jižním pólem nebeské sféry (viz obr. 170).

Většina astrolábů a orlojů, které vznikly ve druhé polovině 15. století a později, má střed promítání v jižním pólu nebeské sféry. Tak je možné zobrazovat bez výraznějšího zkreslení hvězdy v okolí severního pólu. Při tomto zobrazení pak ale ukazatel Slunce opisuje v létě během dne krátké oblouky, zatímco v zimě dlouhé. Stereografická projekce použitá na orloji tak nabízí zajímavější pohled pro pozorovatele orloje. Navíc podporuje datování orloje do roku 1410, kdy se tento typ projekce běžně u astrolábů používal.



Obr. 170

Ekliptika, která se dotýká obratníku Raka v bodě R_1 a obratníku Kozoroha v bodě K_2, se při této projekci zobrazuje na kružnici. Dotyk ekliptiky s oběma obratníky je zachován i na astronomickém ciferníku orloje.

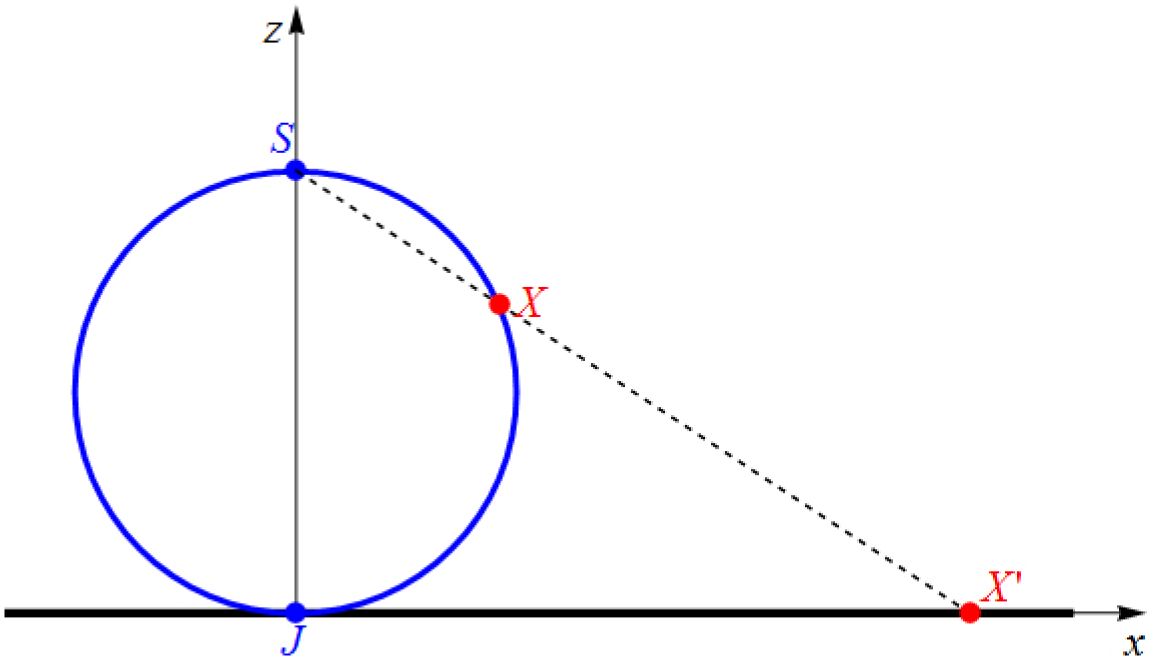
Důležitou vlastností stereografické projekce je, že se jedná o **konformní zobrazení**, tj. zobrazení, při kterém se nemění zobrazované úhly. Stereografická projekce je přitom velmi nelineární zobrazení.

Nelineárnost zobrazení spočívá v tom, že kružnice s velmi malými poloměry v okolí severního pólu, ze kterého promítáme, se zobrazují na kružnice s velkými poloměry v projekční rovině, zatímco kružnice s malými poloměry z okolí jižního pólu se zobrazují opět na kružnice s malými poloměry.

Na astronomickém ciferníku zavedeme kartézské souřadnice $0xy$ se středem v bodě J. Uvažujme nyní rovinu yz kolmou na vodorovnou osu x. Počátek souřadnic v rovině yz je tedy bod $J = [0;\, 0]$. Bod S pak má souřadnice $S = [0;\, 2r]$, kde r je poloměr kulové plochy. Libovolný bod $X = [x_0;\, z_0]$ (vyjma severního pólu, ze kterého promítáme) ležící na kulové ploše se zobrazí na projekční rovinu do bodu

$$X' = \left[\frac{2r \cdot x}{2r - z};\, 0\right]. \tag{1}$$

Odvození souřadnic obrazů promítaných bodů je poměrně snadné. Stačí v uvažované soustavě souřadnic napsat rovnici přímky SX (viz obr. 171). Tato přímka bude mít rovnici $z = k \cdot x + 2r$, kde $2r$ je z-ová souřadnice bodu S. Skutečnost, že bod X leží na této přímce, můžeme zapsat tak, že souřadnice bodu X dosadíme do rovnice této přímky. Dostaneme tak rovnici $z_0 = k \cdot x_0 + 2r$, ze které vyjádříme směrnici k: $k = \dfrac{z_0 - 2r}{x_0}$. Rovnice přímky SX tedy je: $z = \dfrac{z_0 - 2r}{x_0} \cdot x + 2r$. Souřadnici x' bodu $X' = [x';\, 0]$ získáme z rovnice přímky SX. Musí platit: $0 = \dfrac{z_0 - 2r}{x_0} \cdot x' + 2r$. Odtud získáme: $x' = \dfrac{-2r \cdot x_0}{z_0 - 2r} = \dfrac{2r \cdot x_0}{2r - z_0}$.



Obr. 171

Body R_1 a K_2 (viz obr. 170), které jsou krajními body průměru ekliptiky, tedy mají souřadnice $R_1 = [r \cdot \cos\alpha;\, r + r \cdot \sin\alpha]$ a $K_2 = [-r \cdot \cos\alpha;\, r - r \cdot \sin\alpha]$, kde $\angle NZR_1$ je úhel, který svírá ekliptika s nebeským rovníkem (podle obr. 170 je to úhel $\alpha = 23{,}45^\circ$). Průměty těchto dvou bodů mají ve shodě se vztahem (1) souřadnice $R_1' = \left[\frac{2r^2 \cdot \cos\alpha}{r - r\cdot\sin\alpha}; 0\right] = \left[\frac{2r\cdot\cos\alpha}{1-\sin\alpha}; 0\right]$ a $K_2' = \left[\frac{-2r\cdot\cos\alpha}{1+\sin\alpha}; 0\right]$. Poloměr prstence zvěrokruhu (tj. průmět ekliptiky do roviny astronomického ciferníku) tedy je $r_e = \frac{1}{2}\left|R_1'K_2'\right| = \frac{1}{2}\left|K_2' - R_1'\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{-2r\cdot\cos\alpha}{1+\sin\alpha} - \frac{2r\cdot\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right|$. Úpravou tohoto výrazu získáme: $r_e = \frac{1}{2}\left|\frac{-2r\cdot\cos\alpha + 2r\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2r\cdot\cos\alpha - 2r\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha}\right|$. A po další úpravě dostáváme $r_e = \frac{1}{2}\left|\frac{-4r\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{-4r}{\cos\alpha}\right|$. Poloměr průmětu ekliptiky tedy je:

$$r_e = \frac{2r}{\cos\alpha}\,. \tag{2}$$

Vztah (2) určuje obecně poloměr průmětu hlavní kružnice (tj. kružnice, která leží v rovině procházející středem kulové plochy), která svírá s vodorovnou rovinou úhel α. Níže uvedený vztah (3) lze tedy odvodit i ze vztahu (2), do kterého dosadíme v případě nebeského rovníku $\alpha = 0°$. Pro výpočet poloměrů obratníku Kozoroha a obratníku Raka bychom museli určit nejdříve poloměr daného obratníku a pak dosadit do vztahu (2) $\alpha = 0°$ stejně jako v případě nebeského rovníku. Obratníky totiž nejsou hlavními kružnicemi (na rozdíl od ekliptiky nebo nebeského rovníku).

Body *M* a *N*, které jsou krajními body průměru nebeského rovníku, mají souřadnice $M = [-r; r]$ a $N = [r; r]$. Jejich průměty pak mají podle vztahu (1) souřadnice $M' = \left[\frac{-2r^2}{2r-r}; 0\right] = [-2r; 0]$ a $N' = [2r; 0]$. Poloměr průmětu nebeského rovníku tedy je

$$r_{nr} = \frac{1}{2}\left|M'N'\right| = 2r\,. \tag{3}$$

Poloměr obratníku Kozoroha je

$$r_K = \left|K_2'J\right| = \frac{2r\cdot\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\,. \tag{4}$$

Poloměr obratníku Raka je

$$r_R = \left|R_1'J\right| = \frac{2r\cdot\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\,. \tag{5}$$

S využitím vztahu (2) lze získat i poloměr průmětu obzorníku (horizontu), který je zobrazen na astronomickém ciferníku. K tomu je nutné si uvědomit, že Praha leží na 50. rovnoběžce, a proto do vztahu (2) budeme za α dosazovat $\alpha_{\mathrm{H}} = 90° - 50° = 40°$ (na obr. 170 je to úhel NZH_1). Poloměr horizontu na pražském orloji tedy je

$$r_{\mathrm{H}} = \frac{2r}{\cos\alpha_{\mathrm{H}}} = \frac{2r}{\cos 40°}. \tag{6}$$

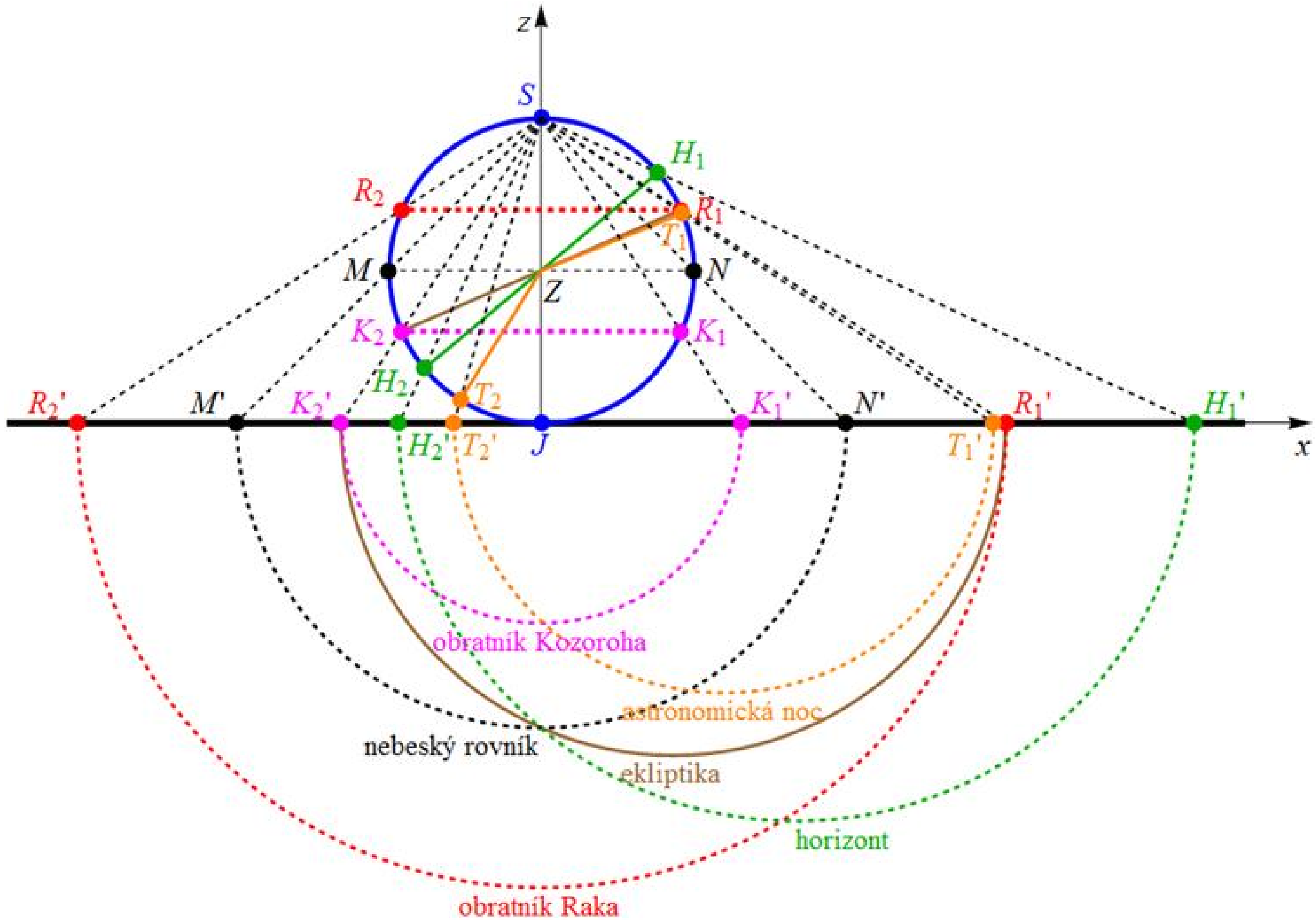
Pomocí úvah o vedlejší kružnici na kulové ploše lze odvodit i poloměr černého kruhu, který vyznačuje na astronomickém ciferníku astronomickou noc. Pro tento poloměr platí vztah

$$r_{\mathrm{AN}} = \frac{r \cdot \cos(\alpha_{\mathrm{H}} - \beta)}{1 - \sin(\alpha_{\mathrm{H}} - \beta)} + \frac{r \cdot \cos(\alpha_{\mathrm{H}} + \beta)}{1 + \sin(\alpha_{\mathrm{H}} + \beta)}, \tag{7}$$

kde $\beta = 18°$ je úhel určující polohu Slunce pod obzorem, v době tzv. astronomického soumraku (na obr. 172 jsou to úhly T_1ZH_1 a T_2ZH_2). Kružnice vyznačující astronomickou noc není z důvodu přehlednosti na obr. 170 zobrazena. Všechny výše zmiňované kružnice jsou zobrazeny na obr. 172. Orientaci osy *x* na astronomickém ciferníku orloje pak zobrazuje obr. 173.

Skutečnost, že body T_1 a R_1 resp. jejich obrazy T_1' a R_1' téměř splývají, vyplývá z hodnot příslušných úhlů: $|\sphericalangle T_1ZH_1| = 18°$ a $|\sphericalangle R_1ZH_1| = |\sphericalangle NZH_1| - |\sphericalangle NZR_1| = 40° - 23{,}45° = 16{,}55°$. Hodnota úhlu T_1ZH_1 se tedy liší od hodnoty úhlu R_1ZH_1 přibližně jen o 1,5 stupně.

Oblast mezi body T_1' a H_1' (resp. mezi body T_2' a H_2') odpovídá astronomickému soumraku.


z
S
H_1
R_2
R_1
T_1
M
N
Z
K_2
K_1
H_2
T_2
R_2'
M'
K_2'
K_1'
N'
R_1'
H_1'
H_2'
T_2'
J
T_1'
x
obratník Kozoroha
astronomická noc
nebeský rovník
ekliptika
horizont
obratník Raka
Obr. 172

Obr. 173

Konstruktéři pražského orloje zvolili poloměr kulové plochy, kterou zobrazovali do roviny astronomického ciferníku, $r \doteq 40\,\mathrm{cm}$. S využitím vztahů (2) až (7) tak dostáváme poloměry průmětů důležitých kružnic na tomto ciferníku: průmět ekliptiky má poloměr 87 cm, průmět nebeského rovníku má poloměr 80 cm, průmět obratníku Kozoroha má poloměr 52 cm, průmět obratníku Raka má poloměr 122 cm, průmět horizontu má poloměr 104 cm a průmět oblasti vyznačující astronomickou noc má poloměr 71 cm.
