Chladnutí kávy - přímý výpočet

Hledání přesného řešení dané závislosti znamená řešit diferenciální rovnici, kterou získáme ze vztahu (3) tak, že od konečného rozdílu fyzikálních veličin $\Delta\tau$ a Δt přejdeme k příslušným diferenciálům. Získáme tedy **diferenciální rovnici** ve tvaru

$$-k \cdot (t - t_{ok}) \cdot d\tau = m \cdot c \cdot dt, \tag{4}$$

kterou můžeme řešit pomocí metody zvané **separace proměnných**. Proměnné převedeme v rovnici (4) na stejnou stranu rovnice, jako stojí příslušné diferenciály, a konstanty převedeme také na jednu stranu rovnice. Dostaneme tak rovnici

$$-\frac{k}{m \cdot c} \cdot d\tau = \frac{dt}{t - t_{ok}}. \tag{5}$$

Tuto rovnici formálně zintegrujeme, čímž jí převedeme do tvaru:

$$\int \left(-\frac{k}{m \cdot c}\right) \cdot d\tau = \int \frac{dt}{t - t_{ok}}. \tag{6}$$

Po zintegrování rovnice (6) získáme vztah

$$-\frac{k}{m \cdot c} \cdot \tau + C = \ln(t - t_{ok}), \tag{7}$$

kde *C* je integrační konstanta, která v tomto případě určuje počáteční podmínky řešené úlohy.

Definiční vztah funkce přirozený logaritmus, která vystupuje ve vztahu (7), je v pořádku, neboť během celého popisovaného děje je $t > t_{ok}$, a tedy $t - t_{ok} > 0$. Káva tedy v konečném čase nedosáhne teploty okolí; to okomentujeme ještě níže.

Vztah (7) vyjádříme pomocí ekvivalentního tvaru $t - t_{ok} = e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot \tau + C}$ resp. tvaru

$$t = t_{ok} + K \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot \tau}, \tag{8}$$

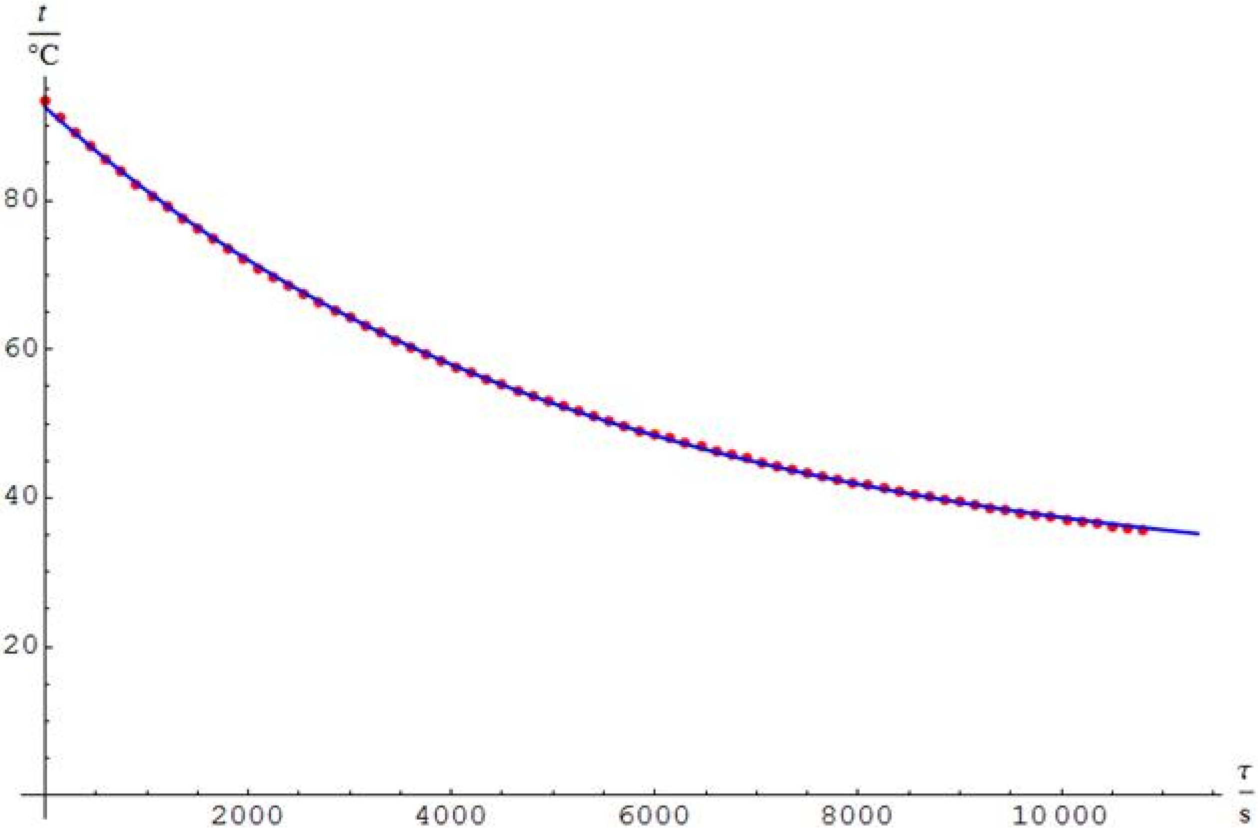
kde $K = e^C$ je konstanta. Tuto konstantu *K* určíme na základě počátečních podmínek: v čase $\tau = 0$ měla káva teplotu t_0. Můžeme tedy dosadit do vztahu (8) a psát: $t_0 = t_{ok} + K \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot 0} = t_{ok} + K \cdot e^0 = t_{ok} + K$. Pro konstantu *K* tedy dostáváme:

$$K = t_0 - t_{ok}. \tag{9}$$

Dosazením vztahu (9) do vztahu (8) získáme hledanou závislost okamžité teploty kávy na čase ve tvaru

$$t = t_{ok} + (t_0 - t_{ok}) \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot \tau}. \tag{10}$$

Závislost popsaná vztahem (10) je zobrazená spolu s naměřenými daty na obr. 8.



Obr. 8

Rychlý fyzikální odhad faktu, že závislost popsaná vztahem (10) odpovídá realitě, můžeme ověřit pomocí krajních hodnot času. Pro $\tau = 0$ dostáváme $t = t_{ok} + \left(t_0 - t_{ok}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot 0} = t_{ok} + t_0 - t_{ok} = t_0$, tj. káva má počáteční teplotu. Pro teplotu kávy po dostatečně dlouhé době od počátku jejího chladnutí, tj. pro $\tau \to \infty$ a tedy $e^{-\tau} \to 0$, dostáváme $t = t_{ok} + \left(t_0 - t_{ok}\right) \cdot 0 = t_{ok}$. Káva dosáhne teploty okolí tedy až po nekonečně dlouhé době.

Ve skutečnosti každý teploměr, kterým budeme teplotu kávy měřit, má určitou přesnost měření, a proto pomocí něj naměříme teplotu kávy rovnou teplotě okolí již v konečném čase.