Chladnutí kávy - numerické řešení

Při numerickém hledání časové závislosti teploty chladnoucí kávy je nutné přesnou diferenciální rovnici (v tomto případě rovnici (4)) nahradit diferenční rovnicí. Ta v případě chladnutí kávy bude mít podobný tvar jako má rovnice (3).

Diferenční rovnice se od diferenciální rovnice liší způsobem popisu časového vývoje dané závislosti. Zatímco diferenciální rovnice popisuje plynulé (spojité) změny fyzikálních veličin (v případě chladnutí kávy spojitou změnu teploty), tak diferenční rovnice popisuje skokové změny fyzikálních veličin. Délku časového kroku $\Delta\tau$ je nutné volit vzhledem k rychlosti probíhajícího děje a vzhledem k přesnosti výpočtu. Kratší časový krok $\Delta\tau$ znamená větší přesnost nalezeného řešení, ale klade vyšší nároky na výpočetní techniku a dobu hledání řešení.

Zjednodušeně lze rozdíl mezi diferenciální rovnicí a diferenční rovnicí vysvětlit na sledování filmu. Řešení diferenciální rovnice znamená sledovat standardní film, tj. promítání 24 okének filmového pásu za jednu sekundu. Řešení diferenční rovnice znamená sledovat film, ve kterém budeme mít možnost vidět např. jen každé 24. políčko (a ostatní budou z filmu vystřižena). Navíc políčka ve filmu odpovídající diferenční rovnici mohou mít mírně zkreslena vzhledem k filmovým políčkům odpovídajícím diferenciální rovnici.

Předpokládejme tedy, že káva odevzdá do okolí teplo ΔQ dané vztahem

$$\Delta Q = -C \cdot (t - t_{ok}), \tag{11}$$

kde *C* je tepelná kapacita nádoby s kávou. Současně s tím klesne teplota kávy o hmotnosti *m* a měrné tepelné kapacitě *c* o teplotní rozdíl Δt; tedy platí:

$$\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta t. \tag{12}$$

Porovnáním vztahů (11) a (12) dostaneme vztah

$$m \cdot c \cdot \Delta t = -C \cdot (t - t_{ok}), \tag{13}$$

který můžeme upravit na tvar $\Delta t = -\dfrac{C}{m \cdot c} \cdot (t - t_{ok})$. Uvědomíme-li si, že $\Delta t = t - t'$, a označíme-li $K = \dfrac{C}{m \cdot c}$, můžeme psát původní vztah (13) ve tvaru

$$t = t' - K \cdot (t - t_{ok}). \tag{14}$$

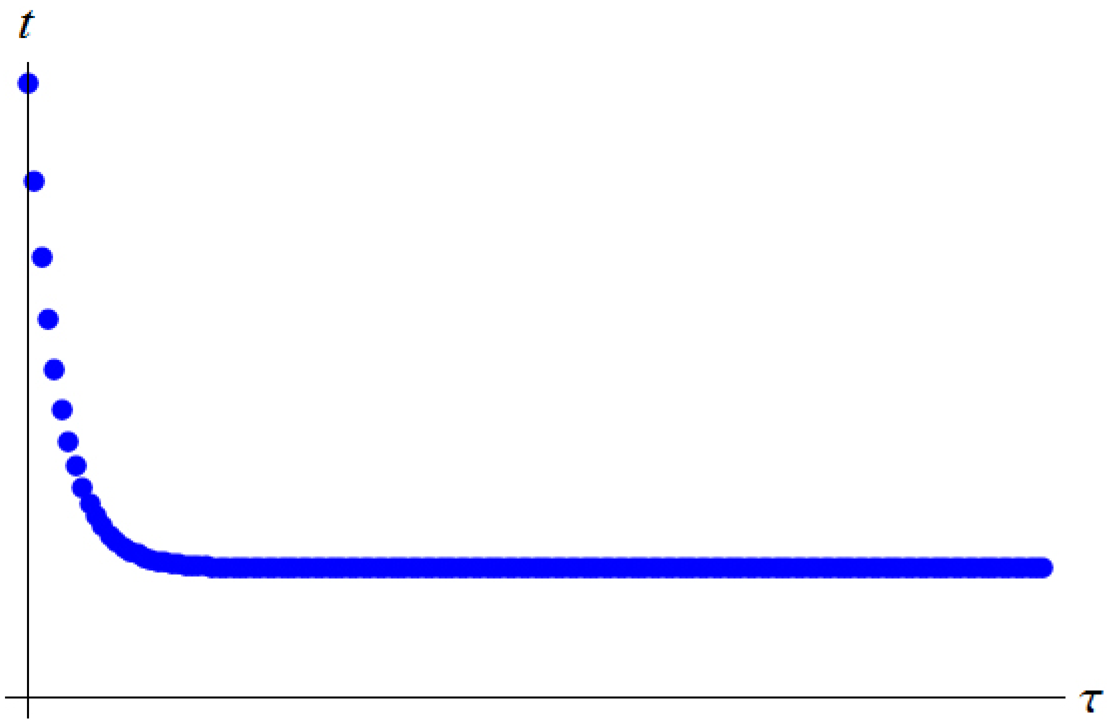
Nyní je potřeba vztah (14) správně interpretovat. Konstanty (tj. zadané fyzikální veličiny) jsou *K* (charakterizuje kávu a nádobu, v níž je káva nalita) a teplota okolí t_{ok}. Proměnnými (neznámými) jsou teploty *t* a t'. Díváme-li se na vztah (14) jako na diferenční rovnici, pak obě teploty (*t* a t') označují tutéž neznámou. V rámci řešení diferenční rovnice je vhodné vztah (14) přepsat do tvaru

$$t_{\text{nová}} = t_{\text{minulá}} - K \cdot (t_{\text{minulá}} - t_{ok}). \tag{15}$$

Metoda, kterou se numericky řeší diferenční rovnice, spočívá v řešení jednoduché rovnice (např. rovnice (15)) v jednotlivých časových krocích $\Delta\tau$. V prvním kroku dosadíme $t_{\text{minulá}} = t_0$ a vypočítáme pomocí vztahu (15) teplotu $t_{\text{nová}}$. V každém dalším kroku pak dosadíme do proměnné $t_{\text{minulá}}$

v minulém kroku vypočtenou teplotu $t_{\text{nová}}$ a opět pomocí vztahu (15) vypočítáme novou hodnotu teploty $t_{\text{nová}}$. Výpočet se opakuje tak dlouho, dokud je (v tomto konkrétním případě) $t_{\text{nová}} > t_{\text{ok}}$. Všechny hodnoty, které postupně získáme v proměnné $t_{\text{nová}}$, pak vyneseme do grafu. Tento graf je zobrazen na obr. 9.

Při konkrétní realizaci pomocí vhodného software je vhodné testovací podmínku přepsat jinak, aby se do výpočtu promítla přesnost daná proměnnou ε. Podmínka pak bude mít tvar: $\left|t_{\text{nová}} - t_{\text{ok}}\right| < \varepsilon$, tj. teplota $t_{\text{nová}}$ se od teploty okolí t_{ok} liší o méně, než je zadaná přesnost výpočtu ε.



Obr. 9