

## Chladnutí kávy - přilítí mléka

S problémem [chladnutí kávy](#) souvisí i další problém, který v běžném životě občas řešíme. Uvaříme si kávu a do odchodu z domova nám zbývá doba  $\tau_{\text{odchod}}$ . Na stole stojí mléko, které má stejnou [teplotu](#) jako okolí, tj. teplotu  $t_{\text{ok}}$ . Kdy je třeba nalít mléko do kávy, aby se teplota směsi kávy s mlékem co nejvíce snížila a bylo možné jí vypít?

Předpokládejme, že káva má teplotu  $t$ , která je dána vztahem (10), hmotnost  $m$  a [měrnou tepelnou kapacitu](#)  $c$ . Počáteční teplota mléka je  $t_m$ , jeho hmotnost  $m_m$  a měrná tepelná kapacita je  $c_m$ . Teplota, na kterou se směs kávy s mlékem ochladí, je  $t_{\text{ism}}$ .

S využitím [kalorimetrické rovnice](#) tedy můžeme psát:

$$m \cdot c \cdot (t - t_{\text{ism}}) = m_m \cdot c_m \cdot (t_{\text{ism}} - t_{\text{ok}}). \quad (16)$$

Pomocí matematických úprav vyjádříme hledanou výslednou teplotu  $t_{\text{ism}}$ . Rovnici (16) proto nejdříve roznásobíme, čímž získáme tvar  $m \cdot c \cdot t - m \cdot c \cdot t_{\text{ism}} = m_m \cdot c_m \cdot t_{\text{ism}} - m_m \cdot c_m \cdot t_{\text{ok}}$ . Po převedení členů s neznámou  $t_{\text{ism}}$  na jednu stranu rovnice dostaneme rovnici ve tvaru  $m \cdot c \cdot t_{\text{ism}} + m_m \cdot c_m \cdot t_{\text{ism}} = m \cdot c \cdot t + m_m \cdot c_m \cdot t_{\text{ok}}$ . Odtud již získáme hledaný vztah pro teplotu  $t_{\text{ism}}$  výsledné směsi ve tvaru

$$t_{\text{ism}} = \frac{m \cdot c \cdot t + m_m \cdot c_m \cdot t_{\text{ok}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}. \quad (17)$$

Vztah (17) není pro další úvahy v nejlepším možném tvaru. Proto provedeme matematické úpravy tak, abychom jej získali v lepším tvaru. Nejdříve ke stávajícímu čitateli přičteme a odečteme výraz  $m \cdot c \cdot t_{\text{ok}}$ . Tím získáme pro výslednou teplotu vztah

$$t_{\text{ism}} = \frac{m \cdot c \cdot t + m_m \cdot c_m \cdot t_{\text{ok}} + m \cdot c \cdot t_{\text{ok}} - m \cdot c \cdot t_{\text{ok}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}. \text{ Nyní vytkneme výrazy tak, abychom v čitateli získali}$$

$$\text{rozdíl teplot } t - t_{\text{ok}} : t_{\text{ism}} = \frac{(m \cdot c + m_m \cdot c_m) \cdot t_{\text{ok}} + m \cdot c \cdot (t - t_{\text{ok}})}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}. \text{ Po rozdělení na dva zlomky a zkrácení,}$$

získáme vztah

$$t_{\text{ism}} = t_{\text{ok}} + \frac{m \cdot c \cdot (t - t_{\text{ok}})}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}. \quad (18)$$

Vztah (18) (stejně tak s ním ekvivalentní vztah (17)) popisují výslednou teplotu směsi kávy a mléka. Přitom teplota  $t$  je teplota samotné kávy před přilítím mléka. A tato teplota je dána vztahem (10). Proto nyní dosadíme vztah (10) do vztahu (18) a získáme:

$$t_{\text{ism}} = t_{\text{ok}} + \frac{m \cdot c}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \cdot \left( t_{\text{ok}} + (t_0 - t_{\text{ok}}) \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \tau} - t_{\text{ok}} \right). \text{ Po úpravě tedy máme:}$$

$$t_{\text{ism}} = t_{\text{ok}} + \frac{m \cdot c}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \cdot (t_0 - t_{\text{ok}}) \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \tau}. \quad (19)$$

Od tohoto okamžiku (tj. po přilítí mléka do kávy) bude chladnout nejen káva, ale i mléko. Proto musíme vztah (19) opravit o tuto skutečnost. Káva spolu s mlékem bude chladnout po dobu

$\tau_{\text{odchod}} - \tau$ , proto můžeme psát:

$$t_{\text{izm}} = t_{\text{ok}} + \frac{m \cdot c}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \cdot (t_0 - t_{\text{ok}}) \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \tau} \cdot e^{-\frac{k_{\text{izm}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} (\tau_{\text{odchod}} - \tau)} \quad (20)$$

Samotná káva chladla po dobu  $\tau$ , na celé chladnutí kávy včetně dolitého mléka máme celkovou dobu  $\tau_{\text{odchod}}$ .

Při opravě vztahu (19) na vztah (20) jsme upravili i exponent exponenciální funkce. Konstantu  $\frac{k}{m \cdot c}$  jsme nahradili konstantou  $\frac{k_{\text{izm}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}$ , protože už se neochlazuje jen káva, ale také mléko. A při dolévání mléka se mohla změnit např. i plocha povrchu [kapaliny](#), ... - proto je použita i konstanta  $k_{\text{izm}}$  místo konstanty  $k$ .

Abychom mohli provést další fyzikální rozbor, upravíme exponenciální funkce ze vztahu (20):

$e^{-\frac{k}{m \cdot c} \tau} \cdot e^{-\frac{k_{\text{izm}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} (\tau_{\text{odchod}} - \tau)} = e^{-\frac{k}{m \cdot c} \tau - \frac{k_{\text{izm}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \tau_{\text{odchod}} + \frac{k_{\text{izm}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \tau} = e^{-\frac{k_{\text{izm}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \tau_{\text{odchod}}} \cdot e^{-\left(\frac{k}{m \cdot c} - \frac{k_{\text{izm}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}\right) \tau}$ . Výhodou této úpravy je to, že činitel  $e^{-\frac{k_{\text{izm}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \tau_{\text{odchod}}}$  nezávisí na čase; doba, která zbývá od zalití kávy do jejího vypití (tj. doba  $\tau_{\text{odchod}}$ ) je konstantní. Vztah (20) můžeme tedy přepsat ve tvaru

$$t_{\text{izm}} = t_{\text{ok}} + \frac{m \cdot c}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \cdot (t_0 - t_{\text{ok}}) \cdot e^{-\frac{k_{\text{izm}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \tau_{\text{odchod}}} \cdot e^{-\left(\frac{k}{m \cdot c} - \frac{k_{\text{izm}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}\right) \tau} \quad (21)$$

Na základě vztahu (21) můžeme učinit tyto závěry:

Pokud bude platit  $\frac{k}{m \cdot c} = \frac{k_{\text{izm}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}$ , pak vztah (20) a tedy ani vztah (21) nezávisí na čase.

To by znamenalo, že mléko o stejné teplotě, jako je teplota okolí, by bylo možné do kávy přilít kdykoliv během doby  $\tau_{\text{odchod}}$ . Výše uvedená rovnost ale neplatí. Zatímco konstanty  $k$  a  $k_{\text{izm}}$  jsou téměř stejné (plocha povrchu kapaliny se dolitím mléka příliš nezmění), tak hmotnost mléka ani jeho měrná tepelná kapacita nejsou nulové.

Pokud by měla platit rovnost  $\frac{k}{m \cdot c} = \frac{k_{\text{izm}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}$  a jsou-li konstanty  $k$  a  $k_{\text{izm}}$  téměř stejné, pak by musel být součin  $m_m \cdot c_m$  nulový. A to není fyzikálně možné!

Proto bude platit  $\frac{k}{m \cdot c} > \frac{k_{\text{izm}}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}$ , tj. káva s mlékem chladne pomaleji než samotná káva.

Proto je vhodné přilít mléko do kávy co nejpozději.

V popsané situaci závisí i na dalších vlivech, které průběh chladnutí ovlivní: způsob promíchání kávy s mlékem, odpařování z povrchu kapaliny, možnost použít chladnější mléko z [chladničky](#) a další fyzikální jevy. Nejvýznamnější vliv bude mít odpařování vody z povrchu kapaliny. [Vypařování](#) můžeme ovlivnit změnou [tlaku](#) páry nad kapalinou (snížení tlaku dosáhneme např. foukáním [vzduchu](#) nad hladinou kapaliny).