Chladnutí kávy - přilití mléka

S problémem chladnutí kávy souvisí i další problém, který v běžném životě občas řešíme. Uvaříme si kávu a do odchodu z domova nám zbývá doba τ_{odchod}. Na stole stojí mléko, které má stejnou teplotu jako okolí, tj. teplotu t_{ok}. Kdy je třeba nalít mléko do kávy, aby se teplota směsi kávy s mlékem co nejvíce snížila a bylo možné jí vypít?

Předpokládejme, že káva má teplotu *t*, která je dána vztahem (10), hmotnost *m* a měrnou tepelnou kapacitu *c*. Počáteční teplota mléka je t_{m}, jeho hmotnost m_{m} a měrná tepelná kapacita je c_{m}. Teplota, na kterou se směs kávy s mlékem ochladí, je t_{km}.

S využitím kalorimetrické rovnice tedy můžeme psát:

$$m \cdot c \cdot (t - t_{\text{km}}) = m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}} \cdot (t_{\text{km}} - t_{\text{ok}}) \,. \tag{16}$$

Pomocí matematických úprav vyjádříme hledanou výslednou teplotu t_{km}. Rovnici (16) proto nejdříve roznásobíme, čímž získáme tvar $m \cdot c \cdot t - m \cdot c \cdot t_{\text{km}} = m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}} \cdot t_{\text{km}} - m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}} \cdot t_{\text{ok}}$. Po převedení členů s neznámou t_{km} na jednu stranu rovnice dostaneme rovnici ve tvaru $m \cdot c \cdot t_{\text{km}} + m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}} \cdot t_{\text{km}} = m \cdot c \cdot t + m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}} \cdot t_{\text{ok}}$. Odtud již získáme hledaný vztah pro teplotu t_{km} výsledné směsi ve tvaru

$$t_{\text{km}} = \frac{m \cdot c \cdot t + m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}} \cdot t_{\text{ok}}}{m \cdot c + m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}}} \,. \tag{17}$$

Vztah (17) není pro další úvahy v nejlepším možném tvaru. Proto provedeme matematické úpravy tak, abychom jej získali v lepším tvaru. Nejdříve ke stávajícímu čitateli přičteme a odečteme výraz $m \cdot c \cdot t_{\text{ok}}$. Tím získáme pro výslednou teplotu vztah $t_{\text{km}} = \dfrac{m \cdot c \cdot t + m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}} \cdot t_{\text{ok}} + m \cdot c \cdot t_{\text{ok}} - m \cdot c \cdot t_{\text{ok}}}{m \cdot c + m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}}}$. Nyní vytkneme výrazy tak, abychom v čitateli získali rozdíl teplot $t - t_{\text{ok}}$: $t_{\text{km}} = \dfrac{(m \cdot c + m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}}) \cdot t_{\text{ok}} + m \cdot c \cdot (t - t_{\text{ok}})}{m \cdot c + m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}}}$. Po rozdělení na dva zlomky a zkrácení, získáme vztah

$$t_{\text{km}} = t_{\text{ok}} + \frac{m \cdot c \cdot (t - t_{\text{ok}})}{m \cdot c + m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}}} \,. \tag{18}$$

Vztah (18) (stejně tak s ním ekvivalentní vztah (17)) popisují výslednou teplotu směsi kávy a mléka. Přitom teplota *t* je teplota samotné kávy před přilitím mléka. A tato teplota je dána vztahem (10). Proto nyní dosadíme vztah (10) do vztahu (18) a získáme: $t_{\text{km}} = t_{\text{ok}} + \dfrac{m \cdot c}{m \cdot c + m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}}} \cdot \left(t_{\text{ok}} + (t_0 - t_{\text{ok}}) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot \tau} - t_{\text{ok}} \right)$. Po úpravě tedy máme:

$$t_{\text{km}} = t_{\text{ok}} + \frac{m \cdot c}{m \cdot c + m_{\text{m}} \cdot c_{\text{m}}} \cdot (t_0 - t_{\text{ok}}) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot \tau} \,. \tag{19}$$

Od tohoto okamžiku (tj. po přilití mléka do kávy) bude chladnout nejen káva, ale i mléko. Proto musíme vztah (19) opravit o tuto skutečnost. Káva spolu s mlékem bude chladnout po dobu

$\tau_{\mathrm{odchod}} - \tau$, proto můžeme psát:

$$t_{\mathrm{km}} = t_{\mathrm{ok}} + \frac{m \cdot c}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}} \cdot \left(t_0 - t_{\mathrm{ok}}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m \cdot c}\cdot\tau} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k_{\mathrm{km}}}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}}\cdot\left(\tau_{\mathrm{odchod}} - \tau\right)} . \tag{20}$$

Samotná káva chladla po dobu τ, na celé chladnutí kávy včetně dolitého mléka máme celkovou dobu τ_{odchod}.

Při opravě vztahu (19) na vztah (20) jsme upravili i exponent exponenciální funkce. Konstantu $\frac{k}{m \cdot c}$ jsme nahradili konstantou $\frac{k_{\mathrm{km}}}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}}$, protože už se neochlazuje jen káva, ale také mléko. A při dolévání mléka se mohla změnit např. i plocha povrchu kapaliny, ... - proto je použita i konstanta k_{km} místo konstanty *k*.

Abychom mohli provést další fyzikální rozbor, upravíme exponenciální funkce ze vztahu (20): $\mathrm{e}^{-\frac{k}{m \cdot c}\cdot\tau} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k_{\mathrm{km}}}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}}\cdot\left(\tau_{\mathrm{odchod}} - \tau\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{k}{m \cdot c}\cdot\tau - \frac{k_{\mathrm{km}}}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}}\cdot\tau_{\mathrm{odchod}} + \frac{k_{\mathrm{km}}}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}}\cdot\tau} = \mathrm{e}^{-\frac{k_{\mathrm{km}}}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}}\cdot\tau_{\mathrm{odchod}}} \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{k}{m \cdot c} - \frac{k_{\mathrm{km}}}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}}\right)\cdot\tau}$. Výhodou této úpravy je to, že činitel $\mathrm{e}^{-\frac{k_{\mathrm{km}}}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}}\cdot\tau_{\mathrm{odchod}}}$ nezávisí na čase; doba, která zbývá od zalití kávy do jejího vypití (tj. doba τ_{odchod}) je konstantní. Vztah (20) můžeme tedy přepsat ve tvaru

$$t_{\mathrm{km}} = t_{\mathrm{ok}} + \frac{m \cdot c}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}} \cdot \left(t_0 - t_{\mathrm{ok}}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k_{\mathrm{km}}}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}}\cdot\tau_{\mathrm{odchod}}} \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{k}{m \cdot c} - \frac{k_{\mathrm{km}}}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}}\right)\cdot\tau} . \tag{21}$$

Na základě vztahu (21) můžeme učinit tyto závěry:

Pokud bude platit $\frac{k}{m \cdot c} = \frac{k_{\mathrm{km}}}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}}$, pak vztah (20) a tedy ani vztah (21) nezávisejí na čase. To by znamenalo, že mléko o stejné teplotě, jako je teplota okolí, by bylo možné do kávy přilít kdykoliv během doby τ_{odchod}. Výše uvedená rovnost ale neplatí. Zatímco konstanty *k* a k_{km} jsou téměř stejné (plocha povrchu kapaliny se dolitím mléka příliš nezmění), tak hmotnost mléka ani jeho měrná tepelná kapacita nejsou nulové.

Pokud by měla platit rovnost $\frac{k}{m \cdot c} = \frac{k_{\mathrm{km}}}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}}$ a jsou-li konstanty *k* a k_{km} téměř stejné, pak by musel být součin $m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}$ nulový. A to není fyzikálně možné!

Proto bude platit $\frac{k}{m \cdot c} > \frac{k_{\mathrm{km}}}{m \cdot c + m_{\mathrm{m}} \cdot c_{\mathrm{m}}}$, tj. káva s mlékem chladne pomaleji než samotná káva. Proto je vhodné přilít mléko do kávy co nejpozději.

V popsané situaci závisí i na dalších vlivech, které průběh chladnutí ovlivní: způsob promíchání kávy s mlékem, odpařování z povrchu kapaliny, možnost použít chladnější mléko z chladničky a další fyzikální jevy. Nejvýznamnější vliv bude mít odpařování vody z povrchu kapaliny. Vypařování můžeme ovlivnit změnou tlaku páry nad kapalinou (snížení tlaku dosáhneme např. foukáním vzduchu nad hladinou kapaliny).