Gravitační potenciální energie v centrálním gravitačním poli

V případě, že budeme popisovat pohyby těles v centrálním gravitačním poli, může být pro výpočet užitečná gravitační potenciální energie.

Zabýváme se centrálním gravitačním polem, tedy polem, ve kterém intenzita gravitačního pole nemá konstantní velikost a ve kterém není možné mluvit o tíhovém zrychlení. Proto vztah pro potenciální energii ve tvaru $E_p = mgh$ **NEPLATÍ**!

Odvození vztahu pro gravitační potenciální energii provedeme dvěma způsoby:

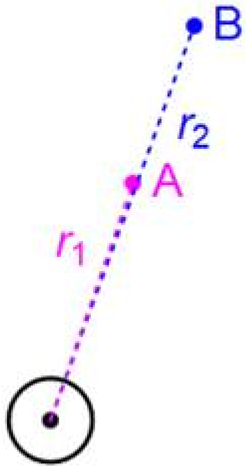
1. s využitím integrálního počtu;
2. s využitím užitečného matematického triku.

Oba způsoby vedou ke stejnému výsledku, každý z uvedených postupů přitom může přinést nový pohled na fyzikální jevy i matematické metody využité při odvozování vztahu pro gravitační potenciální energii.

V obou případech využijeme faktu, že změna gravitační potenciální energie je rovna práci, kterou musíme vykonat při přemístění tělesa o hmotnosti *m* z bodu A do bodu B v okolí uvažovaného centrálního tělesa (viz obr. 80):

$$\Delta E_p = W \,. \tag{1}$$

Tato úvaha platí pro libovolnou energii a s ní spojenou práci: změnu kinetické energie vozíku provedeme tak, že vykonáme práci k roztlačení vozíku, změnu vnitřní energie vody na čaj provedeme vykonáním práce k ohřevu dané vody (např. přivedením elektrického proudu do topné spirály rychlovarné konvice), …



Obr. 80

Abychom zrealizovali popsaný přesun, musíme na těleso působit silou, jejíž velikost bude minimálně rovna velikosti gravitační síly působící v dané vzdálenosti mezi tímto tělesem a centrálním tělesem, které je zdrojem gravitačního pole. Problém je, že velikost gravitační síly mezi body A a B se mění, protože se mění vzdálenost *r* daného tělesa od středu centrálního tělesa. Pro velikost gravitační síly platí vztah

$$F_g = \kappa \frac{m \cdot M}{r^2} \,, \tag{2}$$

kde κ je gravitační konstanta a *M* je hmotnost centrálního tělesa.

S využitím integrálního počtu můžeme vztah (1) přepsat ve tvaru $\Delta E_p = \int_{r_1}^{r_2} F \,\mathrm{d}r$. Po dosazení ze vztahu (2) dostaneme vztah $\Delta E_p = \int_{r_1}^{r_2} \kappa \frac{m \cdot M}{r^2} \mathrm{d}r$. Před vlastní integrací využijeme faktu, že v integrandu vystupují konstanty, které můžeme napsat před integrál. Dostaneme tedy $\Delta E_p = \kappa \cdot m \cdot M \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \mathrm{d}r$. Po zintegrování dostaneme vztah $\Delta E_p = \kappa \cdot m \cdot M \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}$. Po dosazení horní a dolní meze získáváme vztah $\Delta E_p = -\kappa \cdot m \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$. Tento vztah můžeme ve shodě s ostatními podobnými vztahy využívanými ve fyzice psát ve tvaru $\Delta E_p = -\frac{\kappa \cdot m \cdot M}{r_2} - \left(-\frac{\kappa \cdot m \cdot M}{r_1} \right) = E_{p2} - E_{p1}$.

Fyzikální vztahy, které jsou dány jako rozdíl dvou stejných veličin popisujících dva různé stavy téže soustavy (zrychlení jako změna rychlosti v čase, teplo dodané dané soustavě závislé na změně teploty soustavy, ...), lze většinou psát jako „veličina odpovídající stavu 2 mínus veličina odpovídající stavu 1“. Proto byla stejným způsobem zapsána i změna gravitační potenciální energie.

Pro gravitační potenciální energii tělesa o hmotnosti *m* ve vzdálenosti *r* od středu centrálního tělesa o hmotnosti *M* tedy můžeme psát vztah

$$E_p = -\frac{\kappa \cdot m \cdot M}{r}. \quad (3)$$

Znaménko mínus ve vztahu (3) je správně. Stačí si jen uvědomit základní vlastnosti, které by gravitační potenciální energie měla mít:

1. S rostoucí vzdáleností od centrálního tělesa musí růst - konáme totiž větší práci ne vzdálení daného tělesa od centrálního tělesa.
2. Pro extrémně velké vzdálenosti od centrálního tělesa (tj. pro $r \to \infty$) musí být v souladu se vztahem (3) nulová. Hladina nulové potenciální energie je tedy v případě gravitační potenciální energie v nekonečné vzdálenosti od centrálního tělesa.

Tyto dvě podmínky lze současně splnit pouze tak, že gravitační potenciální energie bude záporná (a ve velkých vzdálenostech od centrálního tělesa nulová).

Větší vzdálenost od centrálního tělesa bude znamenat menší absolutní hodnotu zlomku, se znaménkem mínus získáme číslo vyšší, které je na číselné ose umístěné blíže k nule.

Stejný vztah lze odvodit i **s využitím užitečného matematického triku**. Jak bylo uvedeno výše, velikost gravitační síly na dráze AB (viz obr. 80) není konstantní. Abychom mohli použít středoškolské úvahy bez integrálního počtu, je nutné velikost gravitační síly na této dráze nějak zprůměrovat. Vzhledem k tomu, že závislost velikosti gravitační síly na vzdálenosti od centrálního tělesa není lineární, není vhodné pro výpočet průměrné velikosti gravitační síly používat aritmetický průměr. Vzhledem k tomu, že velikost gravitační síly závisí v souladu se vztahem (2) na druhé mocnině vzdálenosti od středu centrálního tělesa, nabízí se jako vhodný nástroj pro výpočet průměrné velikosti síly geometrický průměr.

Pro velikost průměrné gravitační síly F_{gp} tedy můžeme psát $F_{gp} = \sqrt{F_{g1} \cdot F_{g2}}$. Po dosazení ze vztahu (2) dostaneme $F_{gp} = \sqrt{\kappa \frac{m \cdot M}{r_1^2} \cdot \kappa \frac{m \cdot M}{r_2^2}} = \kappa \frac{m \cdot M}{r_1 \cdot r_2}$. Nyní můžeme práci, kterou vykoná síla o velikosti F_{gp} na dráze AB psát ve tvaru $W = F_{gp} \cdot (r_2 - r_1) = \kappa \frac{m \cdot M}{r_1 \cdot r_2} \cdot (r_2 - r_1)$. Roznásobením závorky získáme vztah $W = \kappa \frac{m \cdot M}{r_1} - \kappa \frac{m \cdot M}{r_2}$. Tato práce je v souladu se vztahem (1) dána změnou gravitační potenciální energie; tuto změnu můžeme psát ve tvaru $W = -\kappa \frac{m \cdot M}{r_2} - \left(-\kappa \frac{m \cdot M}{r_1} \right) = E_{p2} - E_{p1}$.

Také z tohoto způsobu odvození získáme pro gravitační potenciální energii vztah (3).
