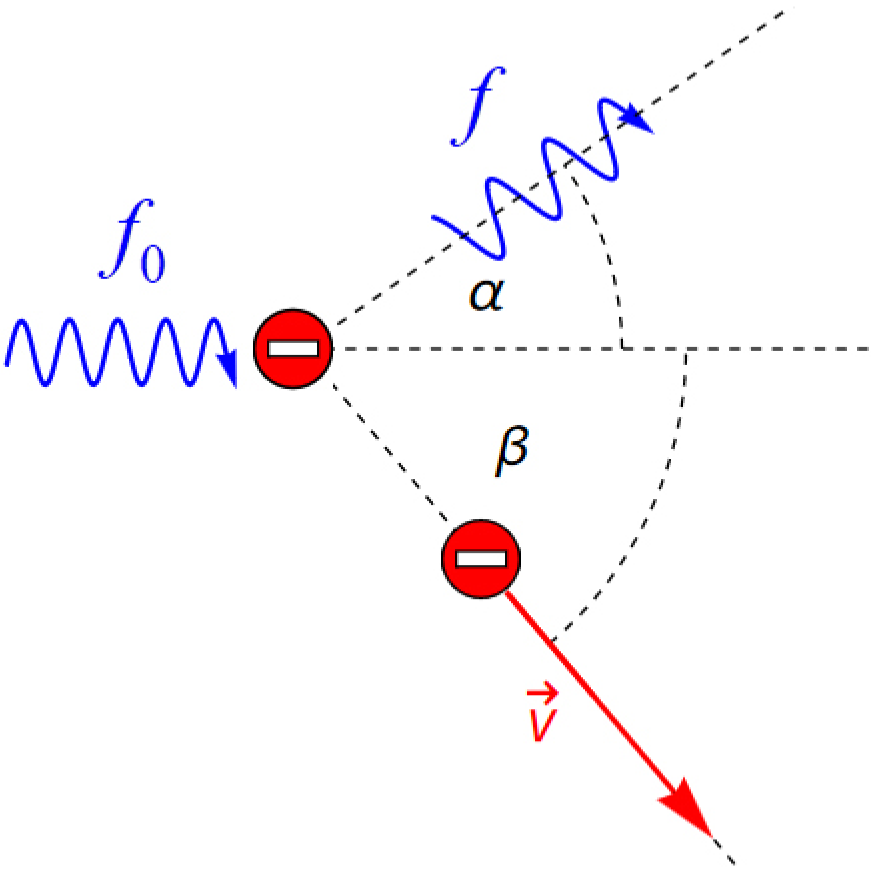
Matematický popis

Při matematickém popisu Comptonova jevu vyjdeme ze situace zobrazené na obr. 16: elektron o klidové hmotnosti m_0 se nachází v klidu a s ním interaguje foton s frekvencí f_0 a hybností $\overline{p_0}$. Po srážce se elektron pohybuje s hybností $\overline{p_e}$ a rozptýlený foton s frekvencí *f* má hybnost $\overline{p_f}$.



Obr. 16

Při popisu této interakce platí zákon zachování energie, který lze psát ve tvaru:

$$E_0 + m_0c^2 = E_f + E\,, \tag{1}$$

kde $E_0 = h \cdot f_0$ je energie původního fotonu, $E_f = h \cdot f$ je energie rozptýleného fotonu a $E = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p_e^2 \cdot c^2}$ je energie pohybujícího se elektronu. Vztah pro tuto energii vyplývá z relativistického vztahu mezi energií a hybností. Symbolem *h* je označena Planckova konstanta.

Dosazením uvedených vztahů do vztahu (1) dostaneme rovnici ve tvaru:

$$h \cdot f_0 + m_0c^2 = h \cdot f + \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p_e^2 \cdot c^2}\,. \tag{2}$$

Rovnici ve tvaru (2) postupně upravíme. Nejdříve odečteme jeden člen z pravé strany na levou:

$$h \cdot f_0 - h \cdot f + m_0c^2 = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p_e^2 \cdot c^2}\,. \tag{3}$$

Nyní obě strany rovnice umocníme: $h^2 \cdot \left(f_0^2 - 2f_0 \cdot f + f^2 \right) + 2h \cdot \left(f_0 - f \right) \cdot m_0 c^2 + m_0^2 \cdot c^4 = m_0^2 \cdot c^4 + p_e^2 \cdot c^2$.

Umocnění je v tomto případě matematicky ekvivalentní úprava. Vzhledem k tomu, že (na základě vztahu (1)) je $f_0 > f$, je levá strana rovnice (3) kladná. Odmocnina stojící na pravé straně téže rovnice je kladná z definice.

Další úpravou získáme rovnici ve tvaru:

$$p_e^2 \cdot c^2 = h^2 \cdot \left(f_0^2 - 2f_0 \cdot f + f^2 \right) + 2h \cdot \left(f_0 - f \right) \cdot m_0 c^2 . \tag{4}$$

Dále platí pro studovanou interakci zákon zachování hybnosti, který můžeme psát ve tvaru:

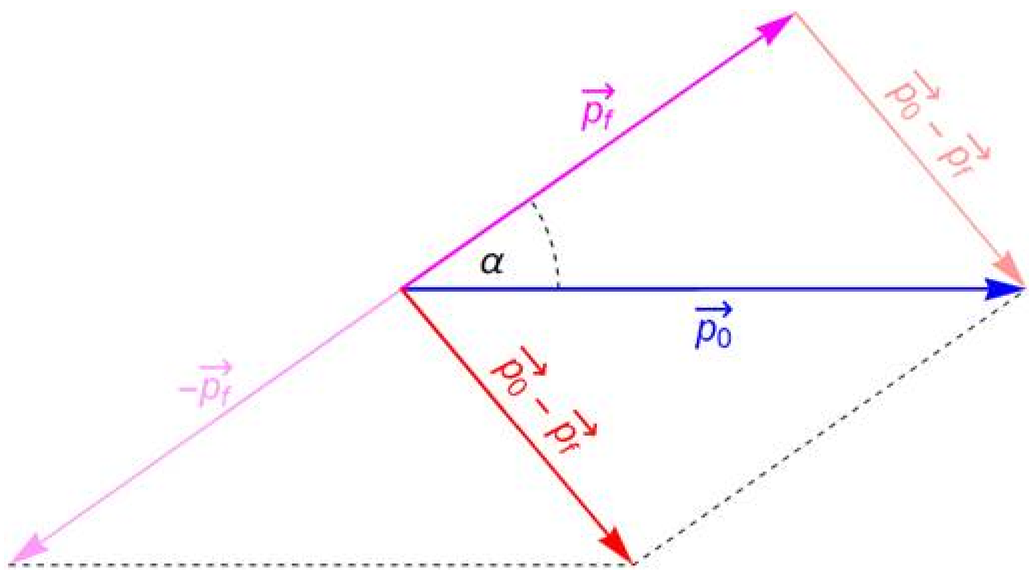
$$\overline{p_0} = \overline{p_f} + \overline{p_e} , \tag{5}$$

z něhož můžeme vyjádřit hybnost elektronu ve tvaru:

$$\overline{p_e} = \overline{p_0} - \overline{p_f} . \tag{6}$$

Pokud si uvědomíme, že uvažované hybnosti lze graficky zobrazit pomocí obr. 17, můžeme s využitím kosinové věty psát:

$$\left(\overline{p_e} \right)^2 = \left(\overline{p_0} - \overline{p_f} \right)^2 = p_f^2 + p_0^2 - 2 p_f \cdot p_0 \cdot \cos \alpha . \tag{7}$$



Obr. 17

Uvědomíme-li si, že pro hybnosti fotonu platí vztahy:

$$p_0 = \frac{h \cdot f_0}{c} \text{ resp. } p_f = \frac{h \cdot f}{c}, \tag{8}$$

můžeme vztah (7) psát ve tvaru:

$$p_e^2 = \frac{h^2 \cdot f^2}{c^2} + \frac{h^2 \cdot f_0^2}{c^2} - 2\frac{h \cdot f}{c} \cdot \frac{h \cdot f_0}{c} \cdot \cos\alpha\,. \tag{9}$$

Ze vztahu (9) tak můžeme vyjádřit:

$$p_e^2 \cdot c^2 = h^2 \cdot f^2 + h^2 \cdot f_0^2 - 2h^2 \cdot f \cdot f_0 \cdot \cos\alpha\,. \tag{10}$$

Vztah (10) tedy vyjadřuje (až na násobek kvadrátem velikosti rychlosti světla ve vakuu) kvadrát velikosti hybnosti elektronu po interakci s fotonem. Tato veličina vystupuje i ve vyjádření zákona zachování hybnosti ve tvaru (4). Proto můžeme vyjádření dané vztahem (10) dosadit do vztahu (4) a dostaneme rovnici: $h^2 \cdot f^2 + h^2 \cdot f_0^2 - 2h^2 \cdot f \cdot f_0 \cdot \cos\alpha = h^2 \cdot \left(f_0^2 - 2f_0 \cdot f + f^2\right) + 2h \cdot \left(f_0 - f\right) \cdot m_0 c^2$.
Tuto rovnici upravíme do tvaru:

$$\left(f_0 - f\right) \cdot m_0 c^2 = h \cdot f \cdot f_0 \cdot \left(1 - \cos\alpha\right). \tag{11}$$

Foton lze kromě jeho frekvence popsat i odpovídající vlnovou délkou λ; mezi oběma veličinami přitom platí:

$$f = \frac{c}{\lambda}. \tag{12}$$

S využitím vztahu (12) lze rovnici (11) psát ve tvaru: tvaru:

$$c \cdot \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot m_0 c^2 = h \cdot c^2 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda_0} \cdot \left(1 - \cos\alpha\right), \tag{13}$$

který můžeme dále upravit do tvaru $\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 \cdot \lambda} \cdot m_0 c = h \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda_0} \cdot \left(1 - \cos\alpha\right)$. Odtud dostáváme vztah:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} \cdot \left(1 - \cos\alpha\right). \tag{14}$$

Vztah (14) popisuje změnu vlnové délky při rozptýlení fotonu do směru, který se směrem pohybu původního fotonu svírá úhel α.

Ze zákona zachování energie plyne, že $f_0 > f$. Proto $\lambda_0 < \lambda$, a tedy $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 > 0$.

Změna vlnové délky fotonu je maximální (ve shodě se vztahem (14)), když je maximální výraz $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 > 0$. Tento výraz je maximální pro $\cos\alpha = -1$, tedy pro $\alpha = \pi$. Největší změna vlnové délky měřená u fotonu tedy bude tehdy, když se bude rozptýlený foton pohybovat proti směru pohybu původního fotonu.