Složené tóny a Fourierova transformace

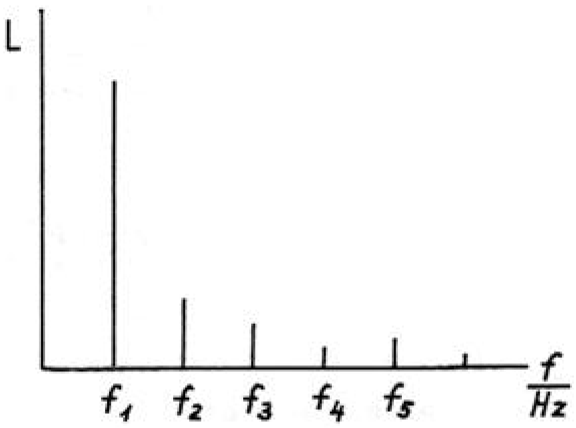
Matematický popis jednoduchého tónu je jednoduchý: $y = y_m \sin \omega t$, kde $\omega = 2\pi f$; f je přitom frekvence daného tónu.

Pro zjednodušení značení budeme dál používat značení z mechanického kmitání. Není zatím důvod zavádět intenzitu zvuku a situaci dále komplikovat. Proto budeme (zatím) používat y i ve smyslu intenzity resp. hlasitosti zvuku.

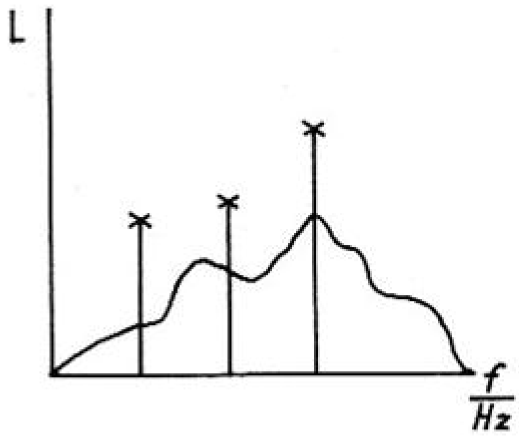
Popis složeného tónu je podobný, ale obsahuje více členů, teoreticky až nekonečně mnoho: $y = y_{m1} \sin 2\pi f_1 t + y_{m2} \sin 2\pi f_2 t + y_{m3} \sin 2\pi f_3 t + \ldots$ Složený tón je tedy složen z mnoha tónů jednoduchých. Frekvence f_1 se nazývá základní a ta určuje výšku složeného tónu, frekvence f_2, f_3, ... se nazývají vyšší harmonické. Lidské ucho ale jednotlivé jednoduché tóny, z nichž se složený tón skládá, nevnímá; vnímá složený tón jako jeden tón, který má specifické zabarvení (barvu). Ta je určena právě vyššími harmonickými frekvencemi.

Přitom platí $f_1 < f_2 < f_3 < \ldots$, tzn. že základní frekvence je nejnižší a vyšší harmonické postupně rostou. Základní tón má ale nejvyšší amplitudu (intenzitu, hlasitost), tj. $y_{m1} > y_{m2} > y_{m3} > \ldots$ Tón se základní frekvencí je tedy ve složeném tónu nejdominantnější a proto určuje právě tento tón se základní frekvencí výšku celého složeného tónu. Tyto vlastnosti ilustruje obr. 53, na kterém je znázorněno frekvenční spektrum složeného tónu. Z obrázku jsou vidět některé vlastnosti složeného tónu:

1. spektrum není spojité - složený tón obsahuje pouze frekvence, které jsou násobkem frekvence základní (na rozdíl od šumu, jehož spektrum je na obr. 54, který obsahuje frekvence z určitého intervalu)
2. s rostoucí frekvencí klesá hlasitost příslušného tónu, který odpovídá dané frekvenci



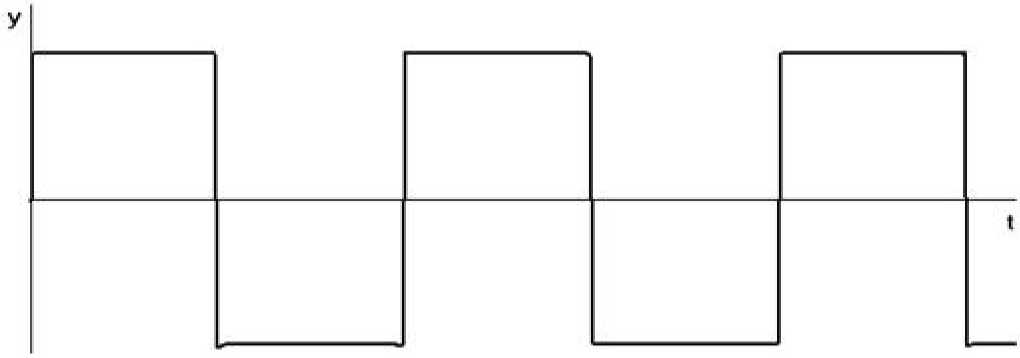
Obr. 53



Obr. 54

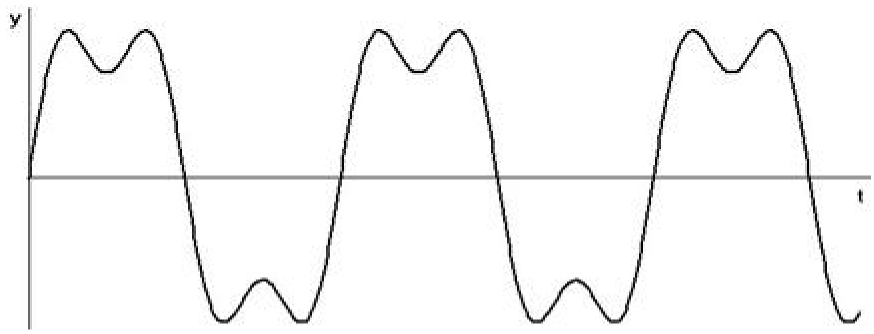
Předpisem $y = y_{m1} \sin 2\pi f_1 t + y_{m2} \sin 2\pi f_2 t + y_{m3} \sin 2\pi f_3 t + \ldots$ lze získat funkci (průběh zvuku), která je zobrazená např. na obr. 52. Ale nejen takové. Ve fyzice (a zejména elektrotechnice) mají značný význam funkce, které jsou periodické a jejichž matematické vyjádření není příliš vhodné na další zpracování. Jedná se např. o časový průběh napětí ve tvaru obdélníka (viz obr. 55). Ačkoliv to na první pohled tak nevypadá, tento průběh lze popsat výše uvedeným předpisem. Jen je nutné správně zvolit frekvence, které budeme do vztahu dosazovat: $y = y_{m1} \sin(2\pi f t) + y_{m2} \sin(2\pi .3 f t) + y_{m3} \sin(2\pi .5 f t) + \ldots + y_{mn} \sin\left(2\pi .(2n-1) f t\right)$.

Graf zobrazený na obr. 55 není z hlediska matematiky funkcí, neboť v bodech, kde funkce strmě stoupá či klesá, má vlastně nekonečně mnoho funkčních hodnot. To ovšem není z pohledu fyziky (elektrotechniky, ...) pravda, neboť uvažovaná fyzikální veličina (např. napětí) se nemůže změnit v nulovém čase. To není možné. Vždy se změna uvažované fyzikální veličiny uskuteční za určitý časový interval. A závisí na technickém provedení (např. generátoru napětí), jak dosáhnout co možná nejmenšího časového intervalu, během něhož se uvažovaná fyzikální veličina změní o požadovanou hodnotu.

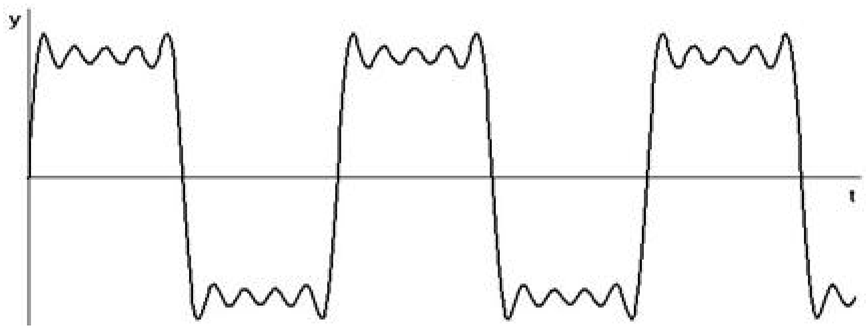


Obr. 55

Na obr. 56 a obr. 57 jsou zobrazeny grafy téže funkce pro hodnoty $n = 2$ a $n = 5$. Je patrné, že s rostoucím počtem členů obsažených v definičním vztahu dané závislosti, roste i přesnost grafu funkce a graf se více blíží teoretickému průběhu na obr. 55.



Obr. 56



Obr. 57

Výpočet koeficientů $y_{\mathrm{m}i}$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ vychází z matematické metody, kterou objevil francouzský matematik a fyzik baron Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830). Této metodě, jejímž použitím lze libovolnou periodickou funkci zapsat ve tvaru $y = y_{\mathrm{m}1} \sin 2\pi f_1 t + y_{\mathrm{m}2} \sin 2\pi f_2 t + y_{\mathrm{m}3} \sin 2\pi f_3 t + \ldots$, se proto říká **Fourierova analýza**.

Výpočet jednotlivých koeficientů Fourierovy analýzy je nutné počítat buď numericky a nebo s využitím integrálního počtu.