

ÚLOHA: PRŮMĚRNÁ RYCHLOST

Zadání:

Auto jelo po dráze s průměrnou rychlostí o velikosti $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Jak velkou průměrnou rychlostí musí jet v průběhu následujícího úseku délky s , aby výsledná velikost průměrné rychlosti (tj. velikost průměrné rychlosti v obou úsecích dohromady) byla $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Řešení:

Podle zadání víme, že jsou dány tyto veličiny:

$$v_1 = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$v_p = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Máme najít velikost rychlosti v_2 , tj. $v_2 = ?$.

Vzhledem k tomu, že oba uvažované úseky dráhy mají délku s a současně se na těchto úsecích pohybuje automobil různě velkými rychlostmi, trval pohyb automobilu na obou úsecích různou dobu. Proto nemůžeme velikost průměrné rychlosti počítat jako průměr velikostí rychlostí!

Velikost průměrné rychlosti v_p je definována vztahem

$$v_p = \frac{s_{\text{celková}}}{t_{\text{celkový}}}. \quad (1)$$

Uvědomíme-li si, jaké fyzikální veličiny máme zadané, můžeme vztah (1) psát ve tvaru

$$v_p = \frac{2s}{t_1 + t_2}, \quad (2)$$

kde t_1 je doba nutná k uražení prvního úseku dráhy; tato doba je definována vztahem

$$t_1 = \frac{s}{v_1}. \quad (3)$$

Analogicky lze definovat dobu t_2 , za kterou urazí automobil druhý úsek dráhy. Pro tuto dobu platí vztah

$$t_2 = \frac{s}{v_2}. \quad (4)$$

S využitím vztahů (3) a (4) můžeme vztah (2) přepsat ve tvaru $v_p = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}}$. Tento vztah

můžeme dále upravit: $v_p = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{\frac{sv_2 + sv_1}{v_1v_2}} = 2s \frac{v_1v_2}{sv_2 + sv_1} = \frac{2sv_1v_2}{s(v_2 + v_1)} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$. Pro velikost

průměrné rychlosti tak dostáváme vztah

$$v_p = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}, \quad (5)$$

ze kterého vyjádříme velikost rychlosti v_2 . Vynásobením rovnice jmenovatelem zlomku na pravé straně získáme $v_p v_1 + v_p v_2 = 2v_1v_2$. Převedením na jednu stranu rovnice dostaneme vztah $v_p v_1 = 2v_1v_2 - v_p v_2$, ve kterém vytkneme v_2 . Získáme tak vztah $v_p v_1 = v_2(2v_1 - v_p)$, ze kterého již vyjádříme velikost rychlosti v_2 ve tvaru

$$v_2 = \frac{v_p v_1}{2v_1 - v_p}. \quad (6)$$

Do vztahu (6) již můžeme dosadit ze zadání úlohy. Postupně tak dostaneme:

$$v_2 = \frac{v_p v_1}{2v_1 - v_p} = \frac{60 \cdot 50}{2 \cdot 50 - 60} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{3000}{40} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 75 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Velikost rychlosti automobilu na druhém úseku dráhy je $75 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.