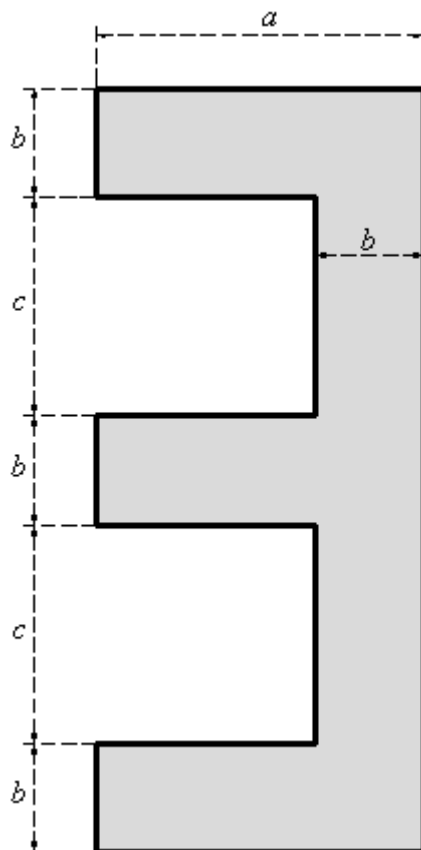


ÚLOHA: TĚŽIŠTĚ „OBRÁCENÉHO E“

Zadání:

Určete polohu těžiště plošného útvaru zobrazeného na obr. 1. Předpokládejte, že útvar je vyroben z homogenního všude stejně silného materiálu. Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty: $a = 6 \text{ dm}$, $b = 2 \text{ dm}$ a $c = 4 \text{ dm}$.



obr. 1

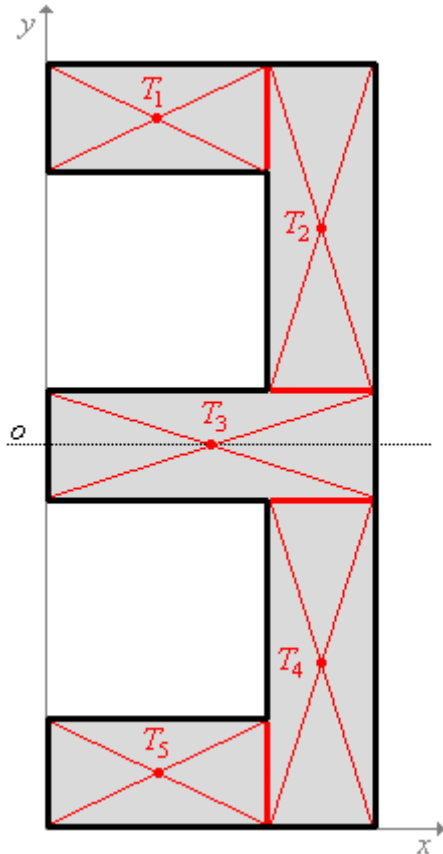
Řešení:

Před vlastním výpočtem polohy těžiště zadaného útvaru je dobré si uvědomit některá zjednodušení. Z obrázku je vidět, že útvar je symetrický podle osy o (viz obr. 2). Těžiště proto musí na této ose ležet. Proto platí: $y_T = b + c + \frac{b}{2} = \frac{3}{2}b + c = 3 + 4 \text{ dm} = 7 \text{ dm}$.

Dále si můžeme zadaný útvar pomyslně rozdělit na části, jejichž polohu těžiště známe. Podle obr. 2 tedy zadaný útvar rozdělíme na pět obdélníků. Jejich obsahy jsou (indexy u obsahu S odpovídají indexům těžiště na obr. 2): $S_1 = S_5 = (a-b)b = ab - b^2$, $S_2 = S_4 = (c+b)b = cb + b^2$ a $S_3 = ab$. x -ové souřadnice těžišť uvažovaných obdélníků jsou: $x_1 = x_5 = \frac{a-b}{2}$, $x_2 = x_4 = a - b + \frac{b}{2} = \frac{2a-b}{2}$ a $x_3 = \frac{a}{2}$.

Proto můžeme pro x -ovou souřadnici těžiště celého útvaru psát: $x_T = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3 + x_4 S_4 + x_5 S_5}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5}$. Po dosazení:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{\frac{a-b}{2}(ab-b^2) + \frac{2a-b}{2}(cb+b^2) + \frac{a}{2}ab + \frac{2a-b}{2}(cb+b^2) + \frac{a-b}{2}(ab-b^2)}{ab-b^2 + cb+b^2 + ab + cb+b^2 + ab-b^2} = \\ &= \frac{b(a-b)(a-b) + b(2a-b)(c+b) + \frac{a}{2}ab}{b(3a+2c)} = \frac{a^2 - 2ab + b^2 + 2ac + 2ab - bc - b^2 + \frac{a^2}{2}}{3a+2c} = \\ &= \frac{\frac{3}{2}a^2 + 2ac - bc}{3a+2c} = \frac{3a^2 + 2c(2a-b)}{6a+4c} = \frac{108 + 8 \cdot 10}{36 + 16} \text{ dm} = \frac{188}{52} \text{ dm} = 3,62 \text{ dm}. \end{aligned}$$



obr. 2

Souřadnice těžiště zadaného útvaru ve zvolené soustavě souřadnic jsou $[3,62 \text{ dm}; 7 \text{ dm}]$.

Poznámky:

Dělení zadaného útvaru podle obr. 2 není jediné. Existují další dělení zadaného útvaru, s jejichž pomocí lze zadanou úlohu vyřešit stejně úspěšně.

Pokud by nebyl zadaný útvar osově souměrný, bylo by nutné postup pro hledání x -ové souřadnice zopakovat i pro y -ovou souřadnici těžiště.