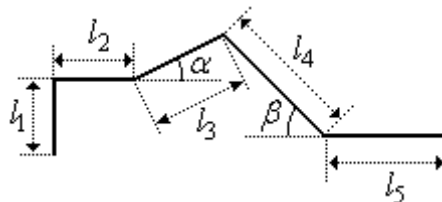


## ÚLOHA: TĚŽIŠTĚ LOMENNÉ ČÁRY

### Zadání:

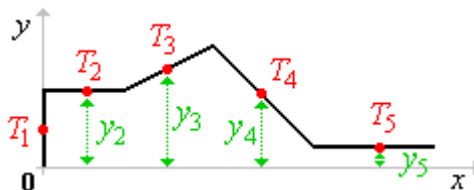
Určete polohu těžiště rovinné lomené čáry zobrazené na obr. 1. Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty  $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$ ,  $l_3 = 1,5 \text{ m}$ ,  $l_4 = l_5 = 2 \text{ m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$  a  $\beta = 45^\circ$ .



obr. 1

**Řešení:**

Zadaný útvar si umístíme do kartézské soustavy souřadnic podle obr. 2, v němž jsou vyznačeny pro větší přehlednost pouze y-ové souřadnice těžišť jednotlivých částí lomené čáry.



obr. 2

Pro x-ové souřadnice těžišť jednotlivých částí lomené čáry platí:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{l_2}{2}$ ,  $x_3 = l_2 + \frac{l_3}{2} \cos \alpha$ ,  $x_4 = l_2 + l_3 \cos \alpha + \frac{l_4}{2} \cos \beta$  a  $x_5 = l_2 + l_3 \cos \alpha + l_4 \cos \beta + \frac{l_5}{2}$ .

Analogicky pro y-ové souřadnice platí:  $y_1 = \frac{l_1}{2}$ ,  $y_2 = l_1$ ,  $y_3 = l_1 + \frac{l_3}{2} \sin \alpha$ ,  $y_4 = l_1 + l_3 \sin \alpha - \frac{l_4}{2} \sin \beta$  a  $y_5 = l_1 + l_3 \sin \alpha - l_4 \sin \beta$ .

Nyní už můžeme určit souřadnice těžiště. x-ovou souřadnici určíme pomocí vztahu  $x_T = \frac{x_1 l_1 + x_2 l_2 + \dots + x_n l_n}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}$ . Po dosazení:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{0 \cdot l_1 + \frac{l_2}{2} l_2 + \left(l_2 + \frac{l_3}{2} \cos \alpha\right) l_3 + \left(l_2 + l_3 \cos \alpha + \frac{l_4}{2} \cos \beta\right) l_4 + \left(l_2 + l_3 \cos \alpha + l_4 \cos \beta + \frac{l_5}{2}\right) l_5}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{l_2^2 + 2l_2 l_3 + l_3^2 \cos \alpha + 2l_2 l_4 + 2l_3 l_4 \cos \alpha + l_4^2 \cos \beta + 2l_2 l_5 + 2l_3 l_5 \cos \alpha + 2l_4 l_5 \cos \beta + l_5^2}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 + 3 + 2 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 + 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 + 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4}{1 + 1 + 1,5 + 2 + 2} \text{ m} \doteq 2,45 \text{ m} . \end{aligned}$$

Pro y-ovou souřadnici těžiště lze psát:  $y_T = \frac{y_1 l_1 + y_2 l_2 + y_3 l_3 + y_4 l_4 + y_5 l_5}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5}$ . Po dosazení

$$\begin{aligned} \text{dostáváme: } y_T &= \frac{\frac{l_1}{2} \cdot l_1 + l_1 l_2 + \left(l_1 + \frac{l_3}{2} \sin \alpha\right) l_3 + \left(l_1 + l_3 \sin \alpha - \frac{l_4}{2} \sin \beta\right) l_4 + \left(l_1 + l_3 \sin \alpha - l_4 \sin \beta\right) l_5}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{l_1^2 + 2l_1 l_2 + 2l_1 l_3 + l_3^2 \sin \alpha + 2l_1 l_4 + 2l_3 l_4 \sin \alpha - l_4^2 \sin \beta + 2l_1 l_5 + 2l_3 l_5 \sin \alpha - 2l_4 l_5 \sin \beta}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 + 2 + 3 + 2 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} + 4 + 6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 + 6 \cdot \frac{1}{2} - 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + 1 + 1,5 + 2 + 2} \text{ m} \doteq 0,78 \text{ m} . \end{aligned}$$

Souřadnice těžiště zadaného útvaru ve zvolené vztažné soustavě souřadnic tedy jsou  $[2,45 \text{ m}; 0,78 \text{ m}]$ .