

## **ÚLOHA: STŘELBA NA KOPCI**

### **Zadání:**

Na vrcholu kopce, který svírá s vodorovnou rovinou úhel  $30^\circ$ , je umístěno dělo, ze kterého je vystřeleno. V okamžiku výstřelu svírá hlaveň s vodorovnou rovinou určitý elevační úhel a je namířena tak, že vystřelená střela dopadne na dolní část kopce ve vzdálenosti 6 km od místa výstřelu. Určete minimální velikost rychlosti, se kterou střela opustila hlaveň děla, a hodnotu elevačního úhlu hlavně děla při výstřelu. Odporové síly zanedbejte.

Poznámka: Matematické řešení úlohy může překračovat znalosti středoškolské matematiky.

## Řešení:

$$d = 6 \text{ km}$$

$$\varphi = 30^\circ$$

$$v_{\text{min}} = ? \quad \alpha = ?$$

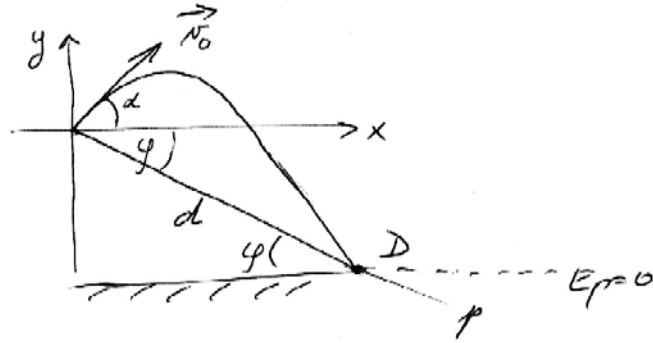
$$p: y = -x \operatorname{tg} \varphi$$

$$x = v_0 \cos \alpha$$

$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t$$



$$D = [d \cos \varphi; -d \sin \varphi] = \left[ v_0 \frac{t_D}{\cos \alpha}; v_0 \frac{t_D}{\cos \alpha} \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_D^2 \right]$$

$$d \cos \varphi = v_0 t_D \cos \alpha$$

$$-d \sin \varphi = v_0 \cdot \frac{d \cos \varphi \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{d^2 \cos^2 \varphi}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$t_D = \frac{d \cos \varphi}{v_0 \cos \alpha}$$

$$2ZE: \frac{1}{2} m v_0^2 + m g \cdot d \sin \varphi = \frac{1}{2} m (v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha - 2 g t_D v_0 \sin \alpha + g^2 t_D^2)$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 + g d \sin \varphi = \frac{1}{2} (v_0^2 - 2 g t_D v_0 \sin \alpha + g^2 t_D^2)$$

$$\rightarrow v_0^2 + 2 g d \sin \varphi = v_0^2 - 2 g \frac{d \cos \varphi}{\cos \alpha} v_0 \sin \alpha + g^2 \frac{d^2 \cos^2 \varphi}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$2 d g \sin \varphi = -2 d g \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} \sin \alpha + \frac{d^2 g^2 \cos^2 \varphi}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$2 \sin \varphi = -2 \cos \varphi \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{d g \cos^2 \varphi}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$2v_0^2 \cos^2 \alpha \sin \varphi + 2v_0^2 \cos \varphi \cdot \sin \alpha \cos \alpha = dg \cos^2 \varphi$$

$$\left(2 \cos^2 \alpha \cdot \sin \varphi + \sin 2\alpha \cos \varphi\right) v_0^2 = dg \cos^2 \varphi$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{dg \cos^2 \varphi}{2 \cos^2 \alpha \sin \varphi + \sin 2\alpha \cos \varphi}}$$

$v_{\text{min}}$  je role. najm  $v_0(\alpha)$

$$\frac{dv_0}{d\alpha} = \sqrt{dg \cos^2 \varphi} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left(2 \cos^2 \alpha \sin \varphi + \sin 2\alpha \cos \varphi\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(2 \cdot 2 \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) \sin \varphi + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot \cos \varphi\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{dg \cos^2 \varphi}{\left(2 \cos^2 \alpha \sin \varphi + \sin 2\alpha \cos \varphi\right)^3}} \left(-4 \cos \alpha \sin \alpha \sin \varphi + 2 \cos 2\alpha \cdot \cos \varphi\right)$$

$$\frac{dv_0}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow \cancel{2} \cos \alpha \sin \alpha \cdot \sin \varphi = \cancel{2} \cos 2\alpha \cdot \cos \varphi$$

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin 2\alpha = \cos 2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \cot \varphi$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \cot \varphi 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$2\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = \underline{\underline{30^\circ}}$$

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{dg \cos^2 30^\circ}{2 \cos^2 30^\circ \sin 30^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ}} = \\ &= \sqrt{\frac{dg \cdot \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} dg}{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{2} dg} = \\ &= \sqrt{\frac{6000 \cdot 10}{2}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \sqrt{3} \cdot 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \underline{\underline{173 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}} \end{aligned}$$

Elevační úhel hlavně děla při výstřelu byl  $30^\circ$  a střela hlaveň děla opouštěla rychlostí o velikosti  $173 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .