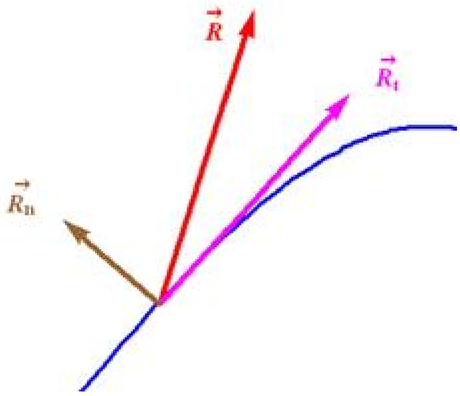
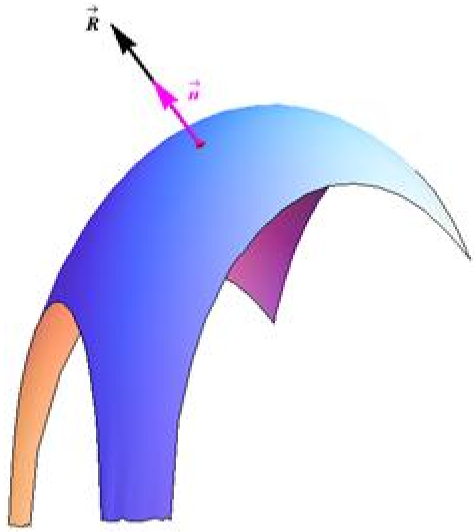
Lagrangeovy rovnice I. druhu

Na základě praxe lze vyslovit axiom:

VAZBOVÉ SÍLY $\vec{R}$ HOLONOMNÍCH VAZEB $\varphi(\vec{r}, t) = 0$ PŮSOBÍ VŽDY KOLMO NA PLOCHU POPSANOU ROVNICÍ $\varphi = 0$.



Obr. 8



Obr. 9

Pokud by vazbové síly působily na plochu jinak, než kolmo (viz obr. 8), zahrneme do vazbových sil pouze složky kolmé na danou plochu. Ostatní složky vazbových sil zahrneme do vtištěných sil (pravých sil).

Tento poznatek je plně ve shodě s praxí: budeme-li uvažovat ideální situace bez třecích sil, bude mít vazbová síla vždy směr kolmý k dané ploše.

Rovnici (1) můžeme tedy přepsat ve tvaru

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} + \vec{R}. \tag{2}$$

Na základě obr. 9 lze psát

$$\vec{R} = \lambda \vec{n}, \tag{3}$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor plochy dané rovnicí $\varphi = 0$ a $\lambda \in \mathbb{R}$.

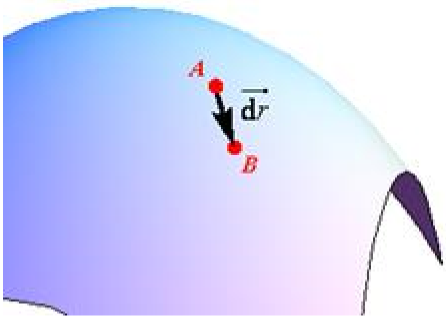
Vztah (3) říká, že vektor vazbové síly $\vec{R}$ je násobkem normálového vektoru $\vec{n}$ plochy, což znamená, že tyto dva vektory jsou vzájemně rovnoběžné. Vzhledem k tomu, že vektor $\vec{n}$ je kolmý k tečné rovině sestrojené k dané ploše v uvažovaném bodě (tj. „je kolmý k ploše“), „je kolmý k ploše“ i vektor $\vec{R}$ (což požadujeme).

Další z matematických vlastností plochy dané rovnicí $\varphi = 0$ lze zapsat ve tvaru

$$\vec{n} = \operatorname{grad}\varphi. \tag{4}$$

Vlastnost (4) lze dokázat matematicky jednoduchou úvahou. Předpokládejme, že na ploše jsou dány dva body $A = [x_1, x_2, x_3]$ a $B = [x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3]$ (viz obr. 10). Oba tyto body leží na ploše popsané rovnicí $\varphi(\vec{r}) = 0$. Proto platí $\varphi(\vec{r_A}) = 0$ a $\varphi(\vec{r_B}) = \varphi(\vec{r_A} + \vec{dr}) = 0$, přičemž $\vec{r_A} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\vec{r_B} = \vec{r_A} + \vec{dr} = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. Rozdíl $\varphi(\vec{r_A} + \vec{dr}) - \varphi(\vec{r_A}) = 0$ lze rozepsat podle Taylorova rozvoje:

$\varphi(\vec{r}_A)+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi(\vec{r}_A)}{\partial x_i}.dx_i+\ldots-\varphi(\vec{r}_A)=0$. Zanedbáme-li členy vyšších řádů, dostaneme: $\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi(\vec{r}_A)}{\partial x_i}.dx_i=0$, což lze přepsat ve formě skalárního součinu $\mathrm{grad}\varphi(\vec{r}_A).\vec{dr}=0$. Skalární součin dvou nenulových vektorů je nulový tehdy, jsou-li uvažované nenulové vektory na sebe kolmé. Vzhledem k tomu, že při uvažovaných vzdálenostech bodů *A* a *B* od sebe, leží vektor $\vec{dr}$ v ploše popsané rovnicí $\varphi(\vec{r})=0$, má vektor $\mathrm{grad}\varphi(\vec{r}_A)$ směr normály k dané ploše v bodě *A*. Proto obecně platí, že $\vec{n}=\mathrm{grad}\varphi$.



Obr. 10

Dosadíme-li vztahy (3) a (4) postupně do vztahu (2), dostaneme: $\vec{F}=m\ddot{\vec{r}}+\vec{R}=m\ddot{\vec{r}}+\lambda\vec{n}=m\ddot{\vec{r}}+\lambda\mathrm{grad}\varphi$.

LAGRANGEOVY ROVNICE I. DRUHU JSOU ROVNICE VE TVARU

$$\vec{F}=m\ddot{\vec{r}}+\lambda\mathrm{grad}\varphi \qquad (5)$$

A

$$\varphi(\vec{r},t)=0\,. \qquad (6)$$

Koeficient λ vystupující v Lagrangeových rovnicích, které francouzský fyzik Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) publikoval v roce 1775, se většinou nazývá Lagrangeův multiplikátor.

Lagrangeovy rovnice jsou vlastně 4 rovnice (rovnici (5) lze rozepsat ve třech souřadnicích) o čtyřech neznámých: $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ a λ.

Lagrangeovy rovnice lze aplikovat při řešení řady úloh.

Příklad: Odtržení hmotného bodu do balonu

Na povrchu balonu o poloměru *a*, který se nachází v homogenním gravitačním poli, je v jeho nejvyšším bodě hmotný bod o hmotnosti *m*. Hmotný bod se začne bez tření pohybovat po povrchu balonu. V jaké výšce nad povrchem podložky, na níž je balon položen, se hmotný bod od balonu odtrhne?

Řešení: Situace je zobrazena na obr. 11. Vazbu, která popisuje danou plochu, by bylo možné definovat jako jednostrannou, ale lépe je vazba oboustranná: lze vyjít z analogie, v níž se hmotný bod pohybuje v trubičce (která je na povrchu balonu). Hmotný bod se odtrhne právě tehdy, když bude velikost vazbové síly nulová, tj. $R=0$.

Na základě rovnic (5) a (6) a obr. 11 lze psát:

$$m\ddot{x}=\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$m\ddot{y}=-mg+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$
$$\varphi(x,y)=x^2+y^2-a^2=0$$

Tyto rovnice lze s využitím rovnice vazby přepsat:

$$m\ddot{x}=2\lambda x$$
$$m\ddot{y}=-mg+2\lambda y$$
$$\varphi(x,y)=x^2+y^2-a^2=0$$

Další postup řešení provedeme pomocí dvou „triků“. Prvním z nich je vyjádřit první derivaci a druhou derivaci rovnice vazby φ podle času: $\dot\varphi = 2x\dot x + 2y\dot y = 0$ a $\ddot\varphi = 2\dot x\dot x + 2x\ddot x + 2\dot y\dot y + 2y\ddot y$. Úpravou druhé derivace postupně dostáváme: $\ddot\varphi = 2(x\ddot x + y\ddot y) + 2\left(\dot x^2 + \dot y^2\right) = 2(x\ddot x + y\ddot y) + 2v^2 = 0$. Tedy $x\ddot x + y\ddot y = -v^2$.

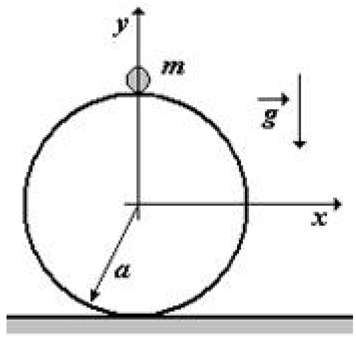
Lagrangeovy rovnice upravíme na tvar $\begin{matrix} m\ddot x x = 2\lambda x^2 \\ m\ddot y y = -mgy + 2\lambda y^2 \end{matrix}$ a sečteme: $m(\ddot x x + \ddot y y) = -mgy + 2\lambda\left(x^2 + y^2\right)$.

Do levé strany dosadíme výraz, který jsme získali úpravou druhé časové derivace vazby, do pravé strany rovnice dosadíme z rovnice vazby. Tak získáme: $-mv^2 = -mgy + 2\lambda a^2$. Z této rovnice by bylo možné vyjádřit λ v závislosti na *y* a *v* a dosadit do Lagrangeových rovnic. Integrováním bychom získali $x(t)$ a $y(t)$.

Lze ovšem postupovat i jinak. Potřebujeme mít ovšem další vztah, který bude svazovat polohu a rychlostí - a to je druhý „trik“. Tímto vztahem je zákon zachování mechanické energie ve tvaru: $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = mga$, kde *y* je *y*-ová souřadnice místa odtržení hmotného bodu od balonu.

Do rovnice $-mv^2 = -mgy + 2\lambda a^2$ dosadíme ze zákona zachování mechanické energie a získáme: $-(2mga - 2mgy) = -mgy + 2\lambda a^2$. Odtud lze psát: $\lambda = \frac{3y - 2a}{2a^2}mg$. Hmotný bod se od balonu odtrhne, je-li $R = 0$, z čehož vyplývá $\lambda = 0$. Tedy $y = \frac{2}{3}a$.

Hmotný bod se tedy od balonu odtrhne ve výšce $\frac{2}{3}a + a = \frac{5}{3}a$ nad podložkou, na níž balon leží.



Obr. 11

Zákon zachování mechanické energie použitý při řešení předchozí úlohy vyplývá z pohybových rovnic, tj. z Lagrangeových rovnic I. druhu použitých při řešení úlohy.

Rovnice $\begin{matrix} m\ddot x = 2\lambda x \\ m\ddot y = -mg + 2\lambda y \end{matrix}$ lze přepsat do tvaru $\begin{matrix} m\ddot x\dot x = 2\lambda x\dot x \\ m\ddot y\dot y = -mg\dot y + 2\lambda y\dot y \end{matrix}$ a sečíst je. Tak získáme rovnici $m(\ddot x\dot x + \ddot y\dot y) = -mg\dot y + 2\lambda(x\dot x + y\dot y)$, kterou lze přepsat ve tvaru $\left[\frac{1}{2}m\left(\dot x^2 + \dot y^2\right)\right]^{\cdot} = -(mgy)^{\cdot} + \lambda\left(x^2 + y^2 - a^2\right)^{\cdot}$.

S využitím první časové derivace rovnice vazby lze psát $\left[\frac{1}{2}m\left(\dot x^2 + \dot y^2\right)\right]^{\cdot} = -(mgy)^{\cdot} + 0$ a po integrování $\frac{1}{2}mv^2 = -mgy + konst$. Tedy $\frac{1}{2}mv^2 + mgy = konst$, což je formulace zákona zachování mechanické energie.

Analogicky lze zákon zachování mechanické energie z Lagrangeových rovnic I. druhu odvodit vždy, když tyto rovnice budou obsahovat skleronomní holonomní vazby. Pokud by rovnice vazby φ byla závislá na čase, její první derivace podle času nebude nulová. To by znamenalo, že energii je nutné během uvažovaného děje dodávat nebo odebírat. Zákon zachování mechanické energie by již neplatil.

Vazbové síly jsou kolmé k vazbě (viz vztahy (3) a (4)) a hmotný bod se pohybuje po vazbě. To znamená, že vazbové síly jsou kolmé ke směru pohybu hmotného bodu, a tedy práce, kterou vazbové síly vykonají, je nulová.